ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Forschung am IVW Köln, 3/2011

Institut für Versicherungswesen

Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten

Ralf Knobloch

Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Zusammenfassung

Zahlungsströme werden vielfach mit dem Barwert, d.h. der Summe der abgezinsten Zahlungen, bewertet. Handelt es sich dabei um Zahlungen, die nicht sicher, d.h. risikobehaftet sind, so gehen neben dem Zinssatz i.d.R. auch Wahrscheinlichkeiten in die Bewertung ein. Viele der dabei verwendeten Modelle sind gedächtnislos. In der vorliegenden Arbeit wird für diese Fälle ein Modell, das auf der Theorie der Markov- Ketten basiert, eingeführt. Aus dieser Modellierung ergibt sich u.a. eine grundlegende Bewertungsformel. In drei unterschiedlichen ökonomischen Beispielen wird gezeigt, dass die Anwendung dieser Bewertungsformel zu den Standardbewertungsansätzen führt. Das primäre Ziel der Arbeit ist dabei nicht die Darstellung neuer Ergebnisse, sondern die grundlegende Aufbereitung der Thematik. Dabei soll die Ausarbeitung eine Basis für weitere Anwendungen schaffen und als Grundlagen für eine EDV-technische Umsetzung dienen.

Abstract

Payment flows are often valued by the present value, i.e. the sum of the discounted payments. If the payments are not safe, i.e. they are fraught with risk, probabilities, apart from the interest rate, are generally also considered in the evaluation. Many of the models applied are without memory. For these cases, a model is introduced which is based on the theory of Markov Chains. A basic valuation formula is one of the results of this modelling. In three different economic examples, it is shown that the application of this valuation formula leads to the standard results. The primary aim of this paper is not the presentation of new results, but the fundamental treatment of this subject matter. The elaboration will create the basis for further applications and an IT technical realisation.

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG 2
2. DAS ALLGEMEINE MODELL 3
3. BEWERTUNGSFORMEL 4
4. BILANZGLEICHUNG 5
5. BEISPIEL 1: FORDERUNGSAUSFALL 6
6. BEISPIEL 2: OPTIONSBEWERTUNG 9
7. BEISPIEL 3: BEWERTUNG LAUFENDER RENTEN IN DER VERSICHERUNGSMATHEMATIK 12
8. AUSBLICK 18

LITERATURVERZEICHNIS 20

1. Einleitung

In vielen Teilgebieten der Wirtschaftswissenschaften ist die Bewertung von Zahlungsströmen eine der zentralen Fragestellungen. Einer der wichtigsten Bewertungsansätze ist dabei der Barwert des Zahlungsstroms, d.h. die Summe der abgezinsten Zahlungen. Es gibt eine Vielzahl von Praxisbeispielen, in denen diese Technik zur Anwendung kommt. Besteht z.B. eine Forderung aus mehreren zukünftigen Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten, so kann dieser Zahlungsstrom zu Bilanzzwecken oder für Abtretungsüberlegungen mit dem Barwert bewertet werden. Auch bei der Kaufpreisfindung von Finanzprodukten wird dieser Bewertungsansatz in der Praxis angewendet. Ein weiteres Beispiel stellt die Personenversicherungsmathematik dar. Hier wird diese Bewertungstechnik zur Festlegung der Tarife bzw. zur Ermittlung von Rückstellungen verwendet.

Als Gemeinsamkeit bei allen Beispielen ist zu beobachten, dass die Höhe der zukünftigen Zahlungen nicht eindeutig feststeht. So besteht bei einer Forderung das Risiko, dass die Zahlungen voll oder teilweise ausfallen. Bei Finanzprodukten ist der zukünftige Zahlungsstrom von der Entwicklung der Märkte anhängig, bei der Personenversicherungsmathematik von biometrischen Ereignissen, wie Tod und Invalidität. Daher wird bei einer Vielzahl dieser Fragestellungen das mit der Unsicherheit verbundene Risiko mithilfe stochastischer Modelle abgebildet.

Viele der verwendeten Modelle sind gedächtnislos, d.h. die Entwicklung von einem Zeitpunkt k zu einem nächsten Zeitpunkt k+1 hängt nur von den Gegebenheiten zum Zeitpunkt k nicht aber von der Historie zu den Zeitpunkten 0,1,…,k-1 ab. In der Stochastik ist es die Theorie der Markov-Prozesse, die sich mit solchen gedächtnislosen Modellen beschäftigt. Geht man dabei von einer zeitdiskreten Betrachtungsweise aus, so nennt man den zugehörigen stochastischen Prozess Markov-Kette.

In dieser Arbeit wird mithilfe der Theorie der Markov-Ketten ein in verschiedenen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften anwendbares Modell entwickelt. Ausgehend von den grundlegenden Eigenschaften einer Markov-Kette kann dann u.a. eine dem Barwertansatz entsprechende Bewertungsformel hergeleitet werden. In drei unterschiedlichen ökonomischen Beispielen wird anschließend gezeigt, dass die Anwendung dieser Bewertungsformel zu den üblichen Standardbewertungsansätzen führt. Die primäre Zielrichtung der Arbeit ist dabei nicht die Darstellung neuer Ergebnisse, sondern die grundlegende Aufbereitung der Thematik. Die Ausarbeitungen sollen eine Basis für weitere Anwendungen schaffen und als Grundlagen für eine EDV-technische Umsetzung dienen.

2. Das allgemeine Modell

Gegeben sei eine Markov-Kette $(\mathbf{X_k})_{\mathbf{k=0,1,2,...}}$ mit dem endlichen Zustandsraum $\mathbf{S=\{0,1,2,...,N\}}$. D.h. die Zufallsvariable $\mathbf{X_k}$ steht für den Zustand, der im Zeitpunkt $\mathbf{k=0,1,2,...}$ angenommen wird. Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt $\mathbf{k-1}$ zum Zeitpunkt $\mathbf{k}$ seien gegeben durch (N+1)x(N+1)-Matrix $\mathbf{Q(k)=(q_{i,j}(k))_{i,j\in\{0,1,...,N\}}}$, d.h.

$$\mathbf{q_{i,j}(k) := P(X_k = j \mid X_{k-1} = i),\ i,j = 0,1,...,N, k = 1,2,...}.$$

Hängen die Übergangsmatrizen nicht explizit von dem Zeitparameter $\mathbf{k}$ ab, so heißt die Markov-Kette homogen, ansonsten inhomogen (vgl. [6] S.16f).

Für jeden Zeitpunkt $\mathbf{k=0,1,2,...}$ sei durch den Zeilenvektor $\mathbf{P_k=(P_{k,j})_{j=0,1,2,...,N}}$ die Verteilung der Zufallsvariablen $\mathbf{X_k}$ gegeben, d.h.

$$P(X_k = j) = P_{k,j},\ j = 0,1,2,...N.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass $\mathbf{P_0}$ vorgegeben ist und alle Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte gegeben dieser Anfangsverteilung berechnet werden. Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [6] S.14, [10] S.185f) ergibt sich für $\mathbf{k=0,1,2,...}$

$$\mathbf{P_k = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j)}.$$

Beweis:

Die Matrizen $\mathbf{\tilde{Q}(k,0)=(\tilde{q}_{i,j}(k,0))_{i,j\in\{0,1,...,N\}}}$ seien gegeben durch

$$\mathbf{\tilde{q}_{i,j}(k,0) := P(X_k = j \mid X_0 = i),\ i,j = 0,1,...,N, k = 1,2,...}.$$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man für $\mathbf{l=0,1,2,...,N}$:

$$\mathbf{P_{k,l} = P(X_k = l) = \sum_{i=0}^{N} P(X_0 = i)\cdot P(X_k = l \mid X_0 = i) = \sum_{i=0}^{N} P_{0,i}\cdot \tilde{q}_{i,l}(k,0) = \left(P_0 \cdot \tilde{Q}(k,0)\right)_l}.$$

Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung ergibt sich durch Induktion nach $\mathbf{k}$:

$\mathbf{\tilde{Q}(k,0) = \prod_{j=1}^{k} Q(j)}$ für $\mathbf{k=0,1,2,...}$. Damit erhält man die Gleichung $\mathbf{P_k = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j)}$.

□

Für jeden Zeitpunkt $\mathbf{k = 0,1,2,...}$ sei die Höhe der Zahlung zum Zeitpunkt $\mathbf{k}$ in Abhängigkeit des eingenommenen Zustands durch den Spaltenvektor $\mathbf{L_k}$ festlegt:

$$\mathbf{L_k = \left(L_{k,j}\right)_{j=0,1,2,...,N}, \; k = 0,1,2,...}.$$

Dieser Spaltenvektor wird im Folgenden Leistungsvektor genannt.

3. Bewertungsformel

Ausgehend von der in Abschnitt 2 beschriebenen Markov-Kette wird der Barwert der zukünftigen Zahlungen für jeden Zeitpunkt $\mathbf{n = 0,1,2,...}$ wie folgt definiert:

$$\mathbf{B_n := \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n} \cdot \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}} \cdot L_{k,j}}$$

Dabei sei $\mathbf{v}$ der Diskontierungsfaktor für eine Periode definiert durch $\mathbf{v = \frac{1}{1+i}}$ und $\mathbf{i}$ der zeitlich konstante Rechnungszins pro Periode. Es sei $\mathbf{abs(x)}$ der Absolutbetrag einer reellen Zahl $\mathbf{x}$. Unter der Bedingung

$$\mathbf{L := \max\left\{abs(L_{k,j}) \mid k = 0,1,2,...,\; j = 0,1,2,...,N\right\} < \infty}$$

konvergiert die Reihe $\mathbf{B_n}$ wegen $\mathbf{0 < v < 1}$ absolut:

$$\mathbf{\sum_{k=n}^{\infty} abs\left(v^{k-n} \cdot \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}} \cdot L_{k,j} \right) \le \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n} \cdot (N+1) \cdot L = \frac{1}{1-v} \cdot (N+1) \cdot L < \infty}.$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\mathbf{B_n}$ (vgl. [4], S.40f). Für den erwarteten Barwert ergibt sich die folgende Aussage.

Satz 1:

Sei $\mathbf{L := \max\left\{abs(L_{k,j}) \mid k = 0,1,2,...,\; j = 0,1,2,...,N\right\} < \infty}$, so gilt:

$$\mathbf{E(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n} \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k}.$$

Beweis:

Wegen $\mathbf{L} < \infty$ ergibt durch Anwendung des Satzes der majorisierten Konvergenz (vgl. [5] S.37):

$$E(B_n) = E\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{m} v^{k-n}\cdot\sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}}\cdot L_{k,j}\right) = \lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{k=n}^{m} v^{k-n}\cdot\sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}}\cdot L_{k,j}\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot E\left(\sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}}\cdot L_{k,j}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot\sum_{j=0}^{N} E\left(1_{\{X_k=j\}}\right)\cdot L_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot\sum_{j=0}^{N} P(X_k = j)\cdot L_{k,j} = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot\sum_{j=0}^{N} P_{k,j}\cdot L_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot P_k\cdot L_k = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot P_0\cdot\prod_{j=1}^{k} Q(j)\cdot L_k$$

□

Folgerung 1:

Sei $L := \max\left\{abs(L_{k,j})\mid k = 0,1,2,\dots,\ j = 0,1,2,\dots,N\right\} < \infty$.

a) Es gilt: $E(B_0) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\cdot P_0\cdot\prod_{j=1}^{k} Q(j)\cdot L_k$.

b) Im Spezialfall einer homogenen Markov-Kette mit $Q(k) = Q, k = 1,2,\dots$, gilt:

$$E(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n}\cdot P_0\cdot Q^k\cdot L_k$$

Die Aussagen folgen direkt aus Satz 1.

4. Bilanzgleichung

Der rekursive Zusammenhang zwischen dem Barwert zum Zeitpunkt n und dem Barwert zum Zeitpunkt $n-1$ wird als Bilanzgleichung bezeichnet. Er überträgt sich auch auf die erwarteten Barwerte. Es ergibt sich folgende Aussage:

Satz 2:

Sei $L := \max\left\{abs(L_{k,j})\mid k = 0,1,2,\dots,\ j = 0,1,2,\dots,N\right\} < \infty$. Dann gilt:

a) $\mathbf{B_{n-1} := \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_{n-1}=j\}} \cdot L_{n-1,j} + v \cdot B_n}$, $\mathbf{n = 1,2,...}$.

b) $\mathbf{E(B_{n-1}) = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{n-1} Q(j) \cdot L_{n-1} + v \cdot E(B_n)}$, $\mathbf{n = 1,2,...}$.

Beweis:

a) Es gilt:

$$\mathbf{B_{n-1} = \sum_{k=n-1}^{\infty} v^{k-n+1} \cdot \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}} \cdot L_{k,j} =}$$

$$\mathbf{= \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_{n-1}=j\}} \cdot L_{n-1,j} + v \cdot \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n} \cdot \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_k=j\}} \cdot L_{k,j} =}$$

$$\mathbf{= \sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_{n-1}=j\}} \cdot L_{n-1,j} + v \cdot B_n}$$

b) Es gilt:

$$\mathbf{E(B_{n-1}) = \sum_{k=n-1}^{\infty} v^{k-n+1} \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k =}$$

$$\mathbf{= P_0 \cdot \prod_{j=1}^{n-1} Q(j) \cdot L_{n-1} + v \cdot \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n} \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k =}$$

$$\mathbf{= P_0 \cdot \prod_{j=1}^{n-1} Q(j) \cdot L_{n-1} + v \cdot E(B_n)}$$

□

5. Beispiel 1: Forderungsausfall

Ein Unternehmen A habe eine Forderung gegenüber einem Unternehmen B. Diese soll in den nächsten $\mathbf{n}$ Perioden durch die Zahlungen $\mathbf{Z_1, Z_2, ..., Z_n > 0}$ beglichen werden. Die Zahlungen erfolgen dabei jeweils zum Ende der Periode. Die Forderung soll aus Sicht des Unternehmens A bewertet werden. Dabei geht das Unternehmen A davon aus, dass es Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{0 < q_1 \le q_2 \le ... \le q_n < 1}$ gibt, mit denen die Zahlungen zu einem bestimmten Zeitpunkt ausfallen, d.h.

$$\mathbf{q_k = P(}\text{ keine Zahlung zum Zeitpunkt }\mathbf{k)}\ ,\ \mathbf{k = 1,2,...,n}\ .$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Zahlungen nach einem Ausfall nicht wieder aufgenommen werden. Damit ergibt sich als Standardbewertungsansatz:

$$\sum_{k=1}^{n} v^k \cdot (1-q_k) \cdot Z_k \; .$$

v sei wiederum der konstante Diskontierungsfaktor. Dieser Sachverhalt kann als inhomogene Markov-Kette modelliert werden.

Der Zustandsraum sei mit $S = \{0,1\}$ gegeben, dabei steht Zustand 0 dafür, dass keine Zahlung erfolgt (Ausfall), und Zustand 1 dafür, dass die Zahlung erfolgt (kein Ausfall).

Für die Anfangsverteilung gilt: $P_0 = (0 \quad 1)$, d.h. zum Zeitpunkt 0 ist die Forderung noch nicht ausgefallen.

Die Zahlungen gehen wie folgt in die Definition der Leistungsvektor ein: $L_{k,0} := 0$ und $L_{k,1} := Z_k,\; k = 1,2,...,n$. Ferner sei L_k für $k = 0$ und $k > n$ der Nullvektor.

Wir setzen $q_0 := 0$. Die Einträge Übergangsmatrix $Q(k) = \left(q_{i,j}(k)\right)_{i,j \in \{0,1\}}$ seien für $k = 1,2,...$ gegeben durch:

$$q_{0,0}(k) := 1$$
$$q_{0,1}(k) := 0$$
$$q_{1,0}(k) := \frac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}$$
$$q_{1,1}(k) := \frac{1 - q_k}{1 - q_{k-1}}$$

Dabei ergibt sich $q_{1,0}(k) := \frac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}$ aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$q_k = q_{0,0}(k) \cdot q_{k-1} + q_{1,0}(k) \cdot (1 - q_{k-1}) \; .$$

Umformen nach $q_{1,0}(k)$ liefert das gewünschte Ergebnis. Daraus folgt:

$$q_{1,1}(k) = 1 - q_{1,0}(k) = \frac{1 - q_k}{1 - q_{k-1}} .$$

Für $k > n$ sei die Übergangsmatrix die Einheitsmatrix.

Durch Anwendung von Folgerung 1 ergibt sich wegen

$$L := \max\left\{ abs(L_{n,j}) \mid n = 0,1,2,\ldots,\ j = 0,1 \right\} = \max\left\{ Z_k \mid k = 1,2,\ldots,n \right\} < \infty$$

als erwarteter Barwert zum Zeitpunkt 0:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k$$

Das Abschneiden der Summe ergibt sich, da L_k für $k = 0$ und $k > n$ der Nullvektor ist.

Ferner gilt: $\prod_{j=1}^{k} Q(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_k & 1 - q_k \end{pmatrix}, k = 1,2,\ldots,n$.

Diese Aussage wird durch Induktion nach k bewiesen. Der Induktionsanfang ergibt sich für $k = 1$ durch:

$$\prod_{j=1}^{1} Q(j) = Q(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{q_1 - q_0}{1 - q_0} & \frac{1 - q_1}{1 - q_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1 & 1 - q_1 \end{pmatrix} \text{ wegen } q_0 = 0.$$

Der Induktionsschritt $k - 1 \to k$ ergibt sich durch:

$$\prod_{j=1}^{k} Q(j) = \prod_{j=1}^{k-1} Q(j) \cdot Q(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{k-1} & 1 - q_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}} & \frac{1 - q_k}{1 - q_{k-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_k & 1 - q_k \end{pmatrix}.$$

Damit und wegen der Definition der Leistungsvektoren erhält man für den erwarteten Barwert:

$$E(B_0) = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot (0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_k & 1 - q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ Z_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot (1 - q_k) \cdot Z_k \ .$$

Dies entspricht dem Ergebnis des Standardansatzes.

6. Beispiel 2: Optionsbewertung

Mit einer Option erwirbt man das Recht, ein zugrundeliegendes Objekt, z.B. eine Aktie, zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Eine Kaufoption wird auch Call genannt, eine Verkaufsoption Put. Die Bewertung einer Option kann u.a. mithilfe eines Binomialmodells vorgenommen werden. Dabei dient die Bewertung z.B. der Festlegung des Kaufpreises der Option. Die folgenden Überlegungen gehen von einer Kaufoption (Call), die es ermöglicht eine Aktie nach $\mathbf{n}$ Perioden zu einem vereinbarten Preis $\mathbf{C}$ zu erwerben, aus. Die Ausübung der Option lohnt nur, wenn der Marktpreis zum Zeitpunkt $\mathbf{n}$ über dem vereinbarten Preis $\mathbf{C}$ liegt. Ansonsten ist es sinnvoll, die Option ungenutzt verfallen zu lassen (vgl. [3] S.157ff)

Beim Binomialmodell (auch Cox-Ross-Rubinstein-Modell genannt) geht man von einem Preis der Aktie zum Zeitpunkt $\mathbf{0}$, hier $\mathbf{K_0}$ genannt, aus. In jeder Periode kann der Preis mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p}$ um $\mathbf{100 \cdot u\%}$ steigen oder mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{1-p}$ um $\mathbf{100 \cdot d\%}$ fallen. Der Preis der Aktie zum Zeitpunkt $\mathbf{n}$, hier $\mathbf{K_n}$ genannt, hängt dann davon ab, wie oft der Aktienkurs im Zeitraum $\mathbf{0}$ bis $\mathbf{n}$ gestiegen bzw. wie oft er gefallen ist. Ingesamt gibt es bei $\mathbf{n}$ Perioden die folgenden $\mathbf{n+1}$ Möglichkeiten für den Preis zum Zeitpunkt $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{K_0 \cdot (1+u)^k \cdot (1-d)^{n-k}, k = 0,1,2,\ldots,n} \;.$$

Der Fall, dass der Aktienkurs k-mal steigt und (n-k)-mal fällt kommt mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

vor. Ingesamt ergibt sich daraus als Wert der Option:

$$\mathbf{v^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \max\left(0; K_0 \cdot (1+u)^k \cdot (1-d)^{n-k} - C\right)} \;.$$

Dabei ist $\mathbf{v}$ wiederum der konstante Diskontierungsfaktor. Dieser ermittelt sich aus dem risikolosen Zinssatz $\mathbf{r}$. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p}$ errechnet sich unter der Annahme der Arbitragefreiheit aus den Größen $\mathbf{r}, \mathbf{u}$ und $\mathbf{d}$ (vgl. [3] S.164ff, [6] S.8f). Dieser Sachverhalt kann wie folgt mit einer Markov-Kette modelliert werden.

Der Zustandsraum sei $\mathbf{S = \{0,1,\ldots,n\}}$. Dabei bedeutet der Zustand $\mathbf{j}$, dass der Aktienkurs im Zeitraum $\mathbf{0}$ bis $\mathbf{n}$ genau $\mathbf{j}$-mal steigt und damit $\mathbf{(n-j)}$-mal fällt.

Die Anfangsverteilung sei gegeben durch: $\mathbf{P_0} = (1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$, die Einträge der Übergangsmatrix $\mathbf{Q(k)} = \left(q_{i,j}(k)\right)_{i,j\in\{0,1,\ldots,n\}}$ sind für $k = 1,2,\ldots,n$ gegeben durch:

$$q_{j,j+1}(k) := p\ ,\ j = 0,1,\ldots,n\text{-}1$$
$$q_{j,j}(k) := 1 - p\ ,\ j = 0,1,\ldots,n\text{-}1$$
$$q_{n,n}(k) := 1$$

Alle anderen Einträge der Übergangsmatrizen werden mit $\mathbf{0}$ besetzt. Für $k > n$ sei die Übergangsmatrix die Einheitsmatrix.

Der Leistungsvektor $\mathbf{L_k}$ sei für $k \neq n$ der Nullvektor. Im Fall $k = n$ sei er wie folgt definiert:

$$L_{n,j} = \max\left(0; K_0 \cdot (1+u)^j \cdot (1-d)^{n-j} - C\right),\ j = 0,1,2,\ldots,n\ .$$

Somit ergibt sich wegen

$$L := \max\left\{ \mathrm{abs}(L_{n,j}) \mid n = 0,1,2,\ldots, j = 0,1,2,\ldots,n \right\} \le K_0 \cdot (1+u)^n < \infty$$

durch Anwendung von Folgerung 1 für den erwarteten Barwert zum Zeitpunkt 0:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k = v^n \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{n} Q(j) \cdot L_n\ .$$

Die Übergangsmatrizen hängen nicht explizit vom Zeitparameter ab. Mit $Q = Q(j)$ für alle $j = 1,2,\ldots,n$ erhält man

$$E(B_0) = v^n \cdot P_0 \cdot Q^n \cdot L_n\ .$$

Ferner gilt für $k = 1,2,\ldots,n$:

$$P_0 \cdot Q^k = \left(\binom{k}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^k \quad \binom{k}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{k-1} \quad \ldots \quad \binom{k}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \right).$$

Diese Aussage wird durch Induktion nach $\mathbf{k}$ bewiesen. Der Induktionsanfang ergibt sich für $\mathbf{k} = \mathbf{1}$ aus folgender Berechnung:

$$\mathbf{P_0 \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}$$

Den Induktionsschritt erhält $\mathbf{k-1 \to k}$ man wie folgt:

$$\mathbf{P_0 \cdot Q^k = P_0 \cdot Q^{k-1} \cdot Q =}$$

$$\mathbf{= \left(\binom{k-1}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{k-1} \quad \binom{k-1}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{k-1-1} \quad \dots \quad \binom{k-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \cdot}$$

$$\mathbf{\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =}$$

$$\mathbf{= \left(\binom{k}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^k \quad \binom{k}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{k-1} \quad \dots \quad \binom{k}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)}$$

Bei der letzten Multiplikation benötigt man für Binomialkoeffizienten:

$$\mathbf{\binom{k-1}{r-1} + \binom{k-1}{r} = \frac{(k-1)!}{(k-r)! \cdot (r-1)!} + \frac{(k-1)!}{(k-1-r)! \cdot r!} =}$$

$$\mathbf{= \frac{(k-1)! \cdot r}{(k-r)! \cdot r!} + \frac{(k-1)! \cdot (k-r)}{(k-r)! \cdot r!} = \frac{(k-1)! \cdot (r+k-r)}{(k-r)! \cdot r!} = \frac{k!}{(k-r)! \cdot r!} = \binom{k}{r}, r = 1,\dots,k\text{-}1}$$

Damit ergibt sich für den erwarteten Barwert zum Zeitpunkt 0:

$$E(B_0) = v^n \cdot \left(\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \quad \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} \quad \ldots \quad \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^0 \right) \cdot L_n =$$

$$v^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \max\left(0; K_0 \cdot (1+u)^k \cdot (1-d)^{n-k} - C\right)$$

Dies entspricht dem oben beschriebenen Standardbewertungsansatz.

7. Beispiel 3: Bewertung laufender Renten in der Versicherungsmathematik

Sowohl in der Lebensversicherungsmathematik als auch in der Pensionsversicherungsmathematik gehört die Bewertung laufender Renten zu den klassischen Fragestellungen. Zunächst betrachten wir dazu das folgende Modell:

Gegeben sei eine männliche Person mit Alter x. Die Wahrscheinlichkeiten im Altersintervall $[x+k, x+k+1)$ zu sterben, wenn man das Altersintervall $[x, x+k)$ überlebt hat, seien gegeben durch die Wahrscheinlichkeit q_{x+k}, $k = 0,1,2,\ldots,\omega - x$. Die Gesamtheit der Sterbewahrscheinlichkeiten wird als Sterbetafel bezeichnet und ω sei dabei das letzte mögliche Alter d.h. insbesondere gilt $q_\omega = 1$.

Diese Person beziehe eine jährliche Rente. Der Auszahlungsbetrag bei Erreichen des Alters $x+k$ sei dabei gegeben durch $R_{x+k} \geq 0$, $k = 0,1,2,\ldots,\omega - x$. Die Rente wird bis zum Tode der Person gezahlt.

In der Versicherungsmathematik bewertet man diese Verpflichtung im Alter x standardmäßig mit dem erwarteten Barwert wie folgt:

$$\sum_{k=0}^{\omega - x} v^k \cdot R_{x+k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - q_{x+j}\right).$$

(vgl. [2] S.35ff, [8] S.322ff, [9] S.66f). Dabei ist $\mathbf{v}$ der konstante Diskontierungsfaktor. Dieser Sachverhalt kann nun als Markov-Kette modelliert werden.

Der Zustandsraum sei $\mathbf{S=\{0,1\}}$ mit folgenden Definitionen:

Zustand 0: Person lebt nicht mehr, d.h. die Rentenzahlung ist eingestellt.

Zustand 1: Die Person lebt, d.h. die Rente ist weiterhin zu zahlen.

Die Anfangsverteilung sei gegeben durch $\mathbf{P_0=(0 \quad 1)}$. Die Einträge der Übergangsmatrix $\mathbf{Q(k)=\left(q_{i,j}(k)\right)_{i,j\in\{0,1\}}}$ sind für $\mathbf{k=1,2,...,\omega-x,\omega-x+1}$ gegeben durch:

$$\mathbf{q_{0,0}(k):=1,\, q_{0,1}(k):=0}$$
$$\mathbf{q_{1,0}(k):=q_{x+k-1},\, q_{1,1}(k):=1-q_{x+k-1}}$$

Ansonsten sei die Übergangsmatrix für $\mathbf{k>\omega-x+1}$ die Einheitsmatrix. Zur Berechnung des Produkts der Übergangsmatrizen kann man folgendes Lemma verwenden.

Lemma 1:

Gegeben seien zwei Matrizen $\mathbf{A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1-a\end{pmatrix}}$ und $\mathbf{B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1-b\end{pmatrix}}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ reelle Zahlen. Dann gibt es eine reelle Zahl $\mathbf{c}$ mit

$$\mathbf{A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-(1-a)\cdot(1-b) & (1-a)\cdot(1-b)\end{pmatrix}}.$$

Beweis:

$$\mathbf{A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a+(1-a)\cdot b & (1-a)\cdot(1-b)\end{pmatrix}}$$

Mit $\mathbf{c=a+(1-a)\cdot b}$ folgt wegen $\mathbf{1-c=(1-a)\cdot(1-b)}$ die Behauptung.

□

Mit Lemma 1 ergibt sich für $\mathbf{k=1,2,...,\omega-x,\omega-x+1}$:

$$\prod_{j=1}^{k} \mathbf{Q(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) & \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) \end{pmatrix}.$$

Für $k > \omega - x + 1$ gilt wegen $q_\omega = 1$: $\prod_{j=1}^{k} \mathbf{Q(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Der Leistungsvektor $\mathbf{L_k}$ sei für $k = 0,1,2,...,\omega - x$ gegeben durch:

$L_{k,0} := 0$ und $L_{k,1} := R_{x+k}$. Für $k > \omega - x$ sei der Leistungsvektor $\mathbf{L_k}$ der Nullvektor. Somit ergibt sich wegen

$$L := \max\left\{\operatorname{abs}(L_{k,j}) \mid k = 0,1,2,..., j = 0,1\right\} = \max\{R_{x+k} \mid k = 0,1,2,...,\omega - x\} < \infty$$

durch Anwendung von Folgerung 1 für den erwarteten Barwert im Alter x:

$$E(B_0) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{P_0} \cdot \prod_{j=1}^{k} \mathbf{Q(j)} \cdot \mathbf{L_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \mathbf{P_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) & \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{L_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R_{x+k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot R_{x+k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right)$$

Dies entspricht dem oben beschriebenen Standardbewertungsansatz.

Das Modell wird nun um eine Hinterbliebenenleistung erweitert. Die männliche Person – im Folgenden Ehemann genannt – habe eine gleichaltrige Ehefrau. Diese bezieht beim Tod des Ehemanns eine lebenslängliche Witwenrente. Aus Vereinfachungsgründen wird die Rentehöhe des Ehemanns mit $\mathbf{1}$ festgelegt, d.h. $\mathbf{R_{x+k} = 1}$ für alle $\mathbf{k = 0,1,2,...,\omega - x}$. Die Rente der Ehefrau betrage 60% der Rente des Ehemanns, d.h. für die Witwenrente gilt $\mathbf{R^w_{x+k} = 0,6}$ für alle $\mathbf{k = 0,1,2,...,\omega - x}$.

Auch für die Ehefrau gibt es analog zum Ehemann Sterbewahrscheinlichkeiten: $\mathbf{q^w_{y+k}, k = 0,1,2,...,\omega - x}$. Dabei gilt ebenfalls für das letztmögliche Alter $\mathbf{q^w_\omega = 1}$. Da der Ehemann und die Ehefrau gleichaltrig sind, gilt $\mathbf{x = y}$.

In der Versicherungsmathematik bewertet man diese Verpflichtung im Alter $\mathbf{x}$ mit dem erwarteten Barwert wie folgt:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) + 0,6 \cdot \sum_{n=1}^{\omega-x}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - q^w_{x+j}\right) \cdot \sum_{k=n}^{\omega-x} v^k \cdot \prod_{j=n}^{k-1}\left(1 - q^w_{x+j}\right)\right].$$

Dabei ist v wiederum der konstante Diskontierungsfaktor. Dieser Sachverhalt kann nun ebenfalls als Markov-Kette modelliert werden.

Der Zustandsraum sei $\mathbf{S = \{0,1,2\}}$ mit folgenden Definitionen:

Zustand 0: Ehemann und Ehefrau leben nicht mehr, d.h. es erfolgt keine Rentenzahlung.

Zustand 1: Der Ehemann lebt, d.h. er bezieht seine Rente.

Zustand 2: Der Ehemann ist tot, aber die Ehefrau lebt und bezieht die Witwenrente.

Die Anfangsverteilung sei gegeben durch: $\mathbf{P_0 = (0 \quad 1 \quad 0)}$, die Einträge der Übergangsmatrix $\mathbf{Q(k) = \left(q_{i,j}(k)\right)_{i,j \in \{0,1,2\}}}$ sind für $\mathbf{k = 1,2,...,\omega - x, \omega - x + 1}$ gegeben durch:

$$q_{0,0}(k) := 1, q_{0,1}(k) := 0, q_{0,2}(k) := 0$$

$$q_{1,0}(k) := q_{x+k-1} \cdot \left(1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}^{w}\right)\right)$$

$$q_{1,1}(k) := 1 - q_{x+k-1}$$

$$q_{1,2}(k) := q_{x+k-1} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}^{w}\right)$$

$$q_{2,0}(k) := q_{x+k-1}^{w}$$

$$q_{2,1}(k) := 0$$

$$q_{2,2}(k) := 1 - q_{x+k-1}^{w}$$

Für $k > \omega - x + 1$ sei die Übergangsmatrix die Einheitsmatrix.

In Folgenden wird aus darstellungstechnischen Gründen die Transponierte des Produkts $P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j)$ berechnet. Es gilt für $k = 1,2,\ldots,\omega - x, \omega - x + 1$:

$$\left(P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j)\right)^T = \begin{pmatrix} 1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) - \sum_{n=1}^{k}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}^{w}\right)\right] \\ \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) \\ \sum_{n=1}^{k}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}^{w}\right)\right] \end{pmatrix}$$

Diese Aussage wird wiederum durch Induktion nach k bewiesen. Der Induktionsanfang ergibt sich für $k = 1$ aus folgender Berechnung:

$$\left(P_0 \cdot Q(1)\right)^T = Q(1)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_x \cdot q_x^{w} & 1 - q_x & q_x \cdot \left(1 - q_x^{w}\right) \\ q_x^{w} & 0 & 1 - q_x^{w} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \cdot q_x^{w} \\ 1 - q_x \\ q_x \cdot \left(1 - q_x^{w}\right) \end{pmatrix}$$

Den Induktionsschritt erhält $\mathbf{k-1 \to k}$ man wie folgt:

$$\left(P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j)\right)^T = \left(P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k-1} Q(j) \cdot Q(k)\right)^T = Q(k)^T \cdot \left(P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k-1} Q(J)\right)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & q_{x+k-1} \cdot \left(1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q^w_{x+j}\right)\right) & q^w_{x+k-1} \\ 0 & 1 - q_{x+k-1} & 0 \\ 0 & q_{x+k-1} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q^w_{x+j}\right) & 1 - q^w_{x+k-1} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \prod_{j=0}^{k-2}\left(1 - q_{x+j}\right) - \sum_{n=1}^{k-1}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-2}\left(1 - q^w_{x+j}\right)\right] \\ \prod_{j=0}^{k-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \\ \sum_{n=1}^{k-1}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-2}\left(1 - q^w_{x+j}\right)\right] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) - \sum_{n=1}^{k}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q^w_{x+j}\right)\right] \\ \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q_{x+j}\right) \\ \sum_{n=1}^{k}\left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2}\left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - q^w_{x+j}\right)\right] \end{pmatrix}$$

Der Leistungsvektor $\mathbf{L_k}$ sei für $\mathbf{k = 0,1,2,...,\omega - x}$ gegeben durch:

$\mathbf{L_{k,0} := 0}$, $\mathbf{L_{k,1} := 1}$ und $\mathbf{L_{k,2} := 0,6}$. Für $\mathbf{k > \omega - x}$ sei der Leistungsvektor $\mathbf{L_k}$ der Nullvektor. Somit ergibt sich wegen

$$\mathbf{L := \max\left\{abs(L_{k,j}) \mid k = 0,1,2,..., und\ j = 1,2\right\} = 1 < \infty}$$

durch Anwendung von Folgerung 1 für den erwarteten Barwert im Alter $\mathbf{x}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E(B_0)} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k = \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=0}^{k} Q(k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - q_{x+j}\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot 0,6 \cdot \sum_{n=1}^{k} \left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - q^w_{x+j}\right) \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - q_{x+j}\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\omega-x} \sum_{k=n}^{\omega-x} \left[v^k \cdot 0,6 \cdot q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - q^w_{x+j}\right) \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - q_{x+j}\right) + \\
&+ 0,6 \cdot \sum_{n=1}^{\omega-x} \left[q_{x+n-1} \cdot \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 - q_{x+j}\right) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - q^w_{x+j}\right) \cdot \sum_{k=n}^{\omega-x} v^k \cdot \prod_{j=n}^{k-1} \left(1 - q^w_{x+j}\right) \right]
\end{aligned}
$$

Dies entspricht dem oben beschriebenen Bewertungsansatz.

8. Ausblick

Die drei dargestellten Beispiele zeigen, dass gedächtnislose Modelle in den Wirtschaftswissenschaften bei der Bewertung von Zahlungsströmen in den unterschiedlichsten Fragestellungen verwendet werden können. Die hergeleiteten allgemeinen Ergebnisse – Bewertungsformel und Bilanzgleichung – sind somit vielseitig einsetzbar.

Eine EDV-technische Umsetzung der Ergebnisse könnte somit zur Bewertung der unterschiedlichsten Sachverhalte verwendet werden. Die EDV-technische Modellierung würde sich dabei standardisiert auf die Definition der Anfangsverteilung, der Leistungsvektoren und der Übergangsmatrizen reduzieren. Die in Abschnitt 3 hergeleitete Formel führt dann zu einer Bewertung des risikobehafteten Zahlungsstroms als erwarteten Barwert.

Bei einfachen Modellen ist der Vorteil einer solchen Vorgehensweise noch nicht besonders groß. In der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik finden sich jedoch komplexere Systeme. In diesen Modellen sind nicht nur zwei oder drei Zustände wie in Abschnitt 7 relevant, sondern darüber hinaus sind noch weitere Zustände in das Modell aufzunehmen, z.B. für Invalidität oder für Erwerbsminderung. Ferner kann es in der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik bei der Verwendung von jahrgangsabhängigen Sterbetafeln und einer kollektiven Bewertung der Hinterbliebenenversorgung zu einer Differenzierung des Zustands Tod mit Hinterbliebenen kommen. Betrachtet man speziell die Pensionsversicherungsmathematik, so liegen den Leistungsvektoren teilweise sehr komplexe Versorgungsordnungen zugrunde. In diesen Fällen stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen eine Bewertung mithilfe von Markov-Ketten einfacher zu handhaben ist, als die üblicherweise verwendeten Bewertungsalgorithmen. Ferner ist zu analysieren, ob die Anwendung der Theorie der Markov-Ketten sogar zu exakteren Bewertungsansätzen führen kann?

Ein weiterer Aspekt, der in der Modellierung mit Markov-Ketten leicht umsetzbar ist, ist die Vorgabe einer Zinsstrukturkurve. In der Regel sind Zinssätze abhängig von der vereinbarten Anlagedauer. Somit müsste für eine Zahlung nach n Jahre ein anderer Jahreszins angesetzt werden, als für eine Zahlung nach n+1 Jahren. Eine solche Abhängigkeit wird als Zinsstrukturkurve bezeichnet. Dies würde die zentrale Formel für den erwarten Barwert zum Zeitpunkt 0 in Folgerung 1 (vorausgesetzt der zufällige Barwert konvergiert) wie folgt verändern:

$$\mathbf{E(B_0) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot L_k} \;.$$

Dabei sei $\mathbf{v_k = \frac{1}{1+i_k}}$ und $\mathbf{i_k}$ der Jahreszins bei einer Anlagedauer von k Jahren.

Literaturverzeichnis

[1]	*Bauer, Heinz*	Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 3. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin · New York · 1978.
[2]	*Gerber, Hans U.*	Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1986.
[3]	*Heidorn, Thomas*	Finanzmathematik in der Bankpraxis, 5. Auflage, Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, Wiesbaden 2006.
[4]	*Forster,Otto*	Analysis 1, 4. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1983.
[5]	*Gänssler, Peter; Stute, Winfried*	Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.
[6]	*Koller, Michael*	Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.
[7]	*Korn, Ralf; Korn, Elke*	Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, Gabler Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1999.
[8]	*Milbrodt, Hartmut; Helbig, Manfred*	Mathematische Methoden der Personenversicherungsmathematik, Walter de Gruyter, Berlin · New York · 1999.
[9]	*Neuburger, Edgar (Hrsg.)*	Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik Heft 25, Verlag Versicherungswirtschaft e.V. Karlsruhe 1997.
[10]	*Ross, Sheldon M.*	Indroduction to Probability Modells, Eighth Edition, Academic Press, Amsterdam e.a. 2003.

Kontakt/Impressum

*Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der OnlinePublikationsreihe **„Forschung am IVW Köln“**.*

Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder unter http://opus.bsz-bw.de/fhk/index.php?la=de abgerufen werden.

*Eine weitere Publikationsreihe ist die **Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswesen der Fachhochschule Köln**. Herausgeber: Verein der Förderer des Instituts für Versicherungswesen an der Fachhochschule Köln e. V. Die Schriftenreihe kann über den Verlag Versicherungswirtschaft bezogen werden (http://www.vvw.de/).*

Eine Übersicht aller Hefte der Schriftenreihe kann auch unter folgender Adresse abgerufen werden:

http://www.f04.fh-koeln.de/fakultaet/institute/ivw/informationen/publikationen/00366/index.html

Köln, Oktober 2011

Herausgeber / Editorship:

Prof. Dr. Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor’s office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch
Institut für Betriebswirtschaftslehre /
Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3425
Fax +49 221 8275-3135

Mail ralf.knobloch@fh-koeln.de

ISSN (online) 2192-8479