ivw Köln
Institut für Versicherungswesen

Forschung am IVW Köln, 3/2014

Institut für Versicherungswesen

Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung

Maria Heep-Altiner, Sebastian Hoos

Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Forschung am IVW Köln 3/2014

Maria Heep-Altiner, Sebastian Hoos

Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung

---

Zusammenfassung

Für eine angemessene Modellierung von Nat Cat Risiken (beispielsweise im Zusammenhang mit einer Rückversicherungsoptimierung) verwendet man üblicherweise Event Loss Tabellen, die von professionellen externen Anbietern mit regelmäßigen Aktualisierungen zur Verfügung gestellt werden. Diese Modelle sind i. d. R. sehr kostspielig, so dass sie oft nur von Rückversicherern oder Rückversicherungsmaklern für die Anwendung auf die eigenen Kundenportfolios lizenziert werden. Alternativ dazu kann mit öffentlich verfügbaren Informationen eine (wenn auch im Vergleich zu professionellen externen Modellen) vereinfachte Nat Cat Modellierung durchgeführt werden, die Erkenntnisse für eine Rückversicherungsoptimierung ermöglicht.

Abstract

In order to model Nat Cat risks suitably (for example with respect to reinsurance optimization), event loss tables provided and regularly updated by external modelling companies are usually applied. Those models are normally quite expensive such that they are often only licensed by reinsurers or reinsurance brokers for application to their own client portfolios. Alternatively, a simplified Nat Cat modelling approach (in contrast to professional external loss event tables) can be achieved on the base of publicly available information that enables an analysis with respect to reinsurance optimization.

Schlagwörter:

Nat Cat Modellierung, Empirische Verteilung, Verteilungsanpassung, Kollektives Model

Keywords:

Nat Cat Modelling, Customized Distribution, Distribuion Fit, Frequency Severity Model

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Für eine angemessene Modellierung von Nat Cat Risiken (beispielsweise im Zusammenhang mit einer Rückversicherungsoptimierung) verwendet man üblicherweise Event Loss Tabellen, die von professionellen externen Anbietern mit regelmäßigen Aktualisierungen zur Verfügung gestellt werden. Diese Modelle sind i. d. R. sehr kostspielig, so dass sie oft nur von Rückversicherern oder Rückversicherungsmaklern für die Anwendung auf die eigenen Kundenportfolios lizenziert werden. Alternativ dazu kann mit öffentlich (oder teilweise öffentlich) verfügbaren Informationen eine (wenn auch im Vergleich zu professionellen externen Modellen) vereinfachte Nat Cat Modellierung durchgeführt werden, die Erkenntnisse für eine Rückversicherungsoptimierung ermöglicht.

So hat beispielsweise der Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV) auf Basis vorhandener Schadeninformationen den Nat Cat Schadenbedarf für Kraftfahrt Kasko modelliert und in einer Studie für die Mitgliedsunternehmen (siehe [1] und [2]) veröffentlicht. Darüber hinaus sind diese Ergebnisse in ein EXCEL Modellierungstool eingegangen, mit dem unternehmensindividuell eine Nat Cat Schadenverteilung auf Basis der individuellen Exposurestruktur gerechnet werden kann.

Alle Berechnungen erfolgen dabei in der Wertigkeit von 2008. Für alle darauf folgenden Jahre wird im Tool der nachfolgende Fortschreibungsalgorithmus

$$SB_{2008+t} = SB_{2008} \cdot (1 + 2{,}32\% \cdot t) \cdot BIP_{2008+t} / BIP_{2008}$$

angesetzt, wobei SB den Schadenbedarf und BIP das Bruttoinlandprodukt bezeichnet. Der GDV Ansatz geht also von einer (additiven) Inflationierung von 2,32% pro Jahr zusätzlich zur (multiplikativen) BIP Inflationierung aus. Dieser zusätzliche Inflationstrend wurde auf Basis der Daten aus der Vergangenheit geschätzt (siehe [1]).

Da dieses Tool auf der Gesamtschadenverteilung beruht, können Brutto Schadenbedarfe für die Tarifierung und Eigenkapitalbedarfe gerechnet werden. Eine Nettobetrachtung hingegen kann kaum sinnvoll abgebildet werden, da eine Gesamtschadenverteilung nur die Abbildung einer Rückversicherungsquote ermöglicht. Dies entspricht aber nicht der klassischen Rückversicherungsstruktur bei Nat Cat Schäden wie beispielsweise Kumulschadenexzedenten.

GDV Studien wenden sich primär an Erstversicherungsunternehmen als Mitglieder des GDV; Rückversicherungsaspekte stehen daher auch nicht im Fokus solcher Studien.

Die Einschränkung auf einen Gesamtverteilungsansatz (der eine geeignete Rückversicherungsmodellierung verhindert) war bei dieser Studie allerdings nicht zwingend, da in diese Studie durchaus auch Einzelereignisse mit detaillierten Eventinformationen eingegangen sind, die den Mitgliedern zur Verfügung gestellt wurden. Hierbei handelte es sich um (im

Hinblick auf die Schadenhäufigkeit) „signifikante“ Hagelereignisse wie z. B. den sogenannten „Münchner Hagel“ von 1984.

Auf Basis dieser Informationen wäre es möglich, nach entsprechender Aufbereitung zumindest für die signifikanten Hagelereignisse eine Frequency / Severity Modellierung (= kollektives Modell, siehe dazu auch [3]) durchzuführen. Dies würde die Anwendung von Kumulschadenexzedenten ermöglichen.

Der verbleidende Schadenaufwand (kleinere Hagelereignisse und alle anderen Nat Cat Ereignisse wie etwa Überschwemmung) müssten nach wie vor als Basisschadenaufwand mit einer Gesamtschadenverteilung modelliert werden, auf die dann bestenfalls nur eine Vorabquote angewendet werden könnte. Derartige – im Hinblick auf die Schadenhäufigkeit als nicht signifikant deklarierte Ereignisse – sollten allerdings i. d. R. nicht oberhalb der Priorität eines Kumulschadenexzedenten liegen.

Für eine Rückversicherungsoptimierung muss man alle signifikanten (d. h. alle rückversicherungsrelevanten) Schadenereignisse geeignet modellieren. Dazu gehört einerseits eine Datenaufbereitung (Revalorisationen und Exposureangleichungen), andererseits eine Auswahl geeigneter Verteilungsmodelle.

Sofern man die Verteilungen modelliert hat, kann man einen Simulationsansatz durchführen, bei dem beispielsweise eine vorgegebene Rückversicherungsstruktur modelliert wird. Für einen derartigen Ansatz benötigt man nicht notwendigerweise eine professionelle Simulationssoftware, da schon EXCEL einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung stellt, der allerding nicht an die Qualität kommerzieller Zufallszahlengeneratoren herankommt und der im Hinblick auf das Laufzeitverhalten nicht immer optimal ist.

Ein allgemeiner Nachteil von Simulationsansätzen besteht allerdings darin, dass – sofern man nicht fixierte Zufallszahlen einliest – gleiche Inputs nicht gleiche, sondern nur ähnliche Outputs erzeugen. Dies kann man „heilen“, indem man die wichtigsten Ergebnisse eines festen Simulationslaufes fixiert – im Sinne von „Event Loss Tabellen“, die allerdings nicht mit professionellen Event Loss Tabellen verwechselt werden dürfen.

Dieser Ansatz verbessert nicht nur das Laufzeitverhalten, sondern liefert auch im Sinne eines Algorithmus‘ exakt gleiche Outputs bei gleichen Inputs. Die „Event Loss Tabellen“ sind aber nicht gerade klein. Darüber hinaus kostet die Fixierung natürlich auch Flexibilität im Hinblick auf notwendige Modellanpassungen.

In dieser Ausarbeitung sollen solche Vorgehensmodelle am Beispiel fiktiver Daten erläutert werden, die den verfügbaren Informationen aus [1] und [2] nachempfunden sind. Dies soll den einzelnen Erstversicherungsunternehmen ermöglichen, die verfügbaren Informationen in diesem und ggf. auch anderen Fällen tiefgehender verwenden zu können.

2 Parametrisierung

Um die Auswirkungen von Kumulschadenexzedenten testen zu können, benötigt man detaillierte Informationen für alle rückversicherungsrelevanten Events, die von der Höhe her in diesen Exzedenten fallen können.

Für einen Kumulschadenexzedenten nicht relevante Ereignisse können ergänzend als Gesamtschadenbedarf modelliert werden, auf den dann nur noch eine Quote angewendet werden kann.

Im Folgenden werden am Beispiel der zuvor eingeführten fiktiven Daten zweckmäßige Parametrisierungen und Verteilungsanpassungen erläutert.

2.1 Schadenbedarf rückversicherungsrelevanter Ereignisse

Für rückversicherungsrelevante Ereignisse sollte in jedem Fall ein Frequency / Severity Modell (kollektives Modell gemäß [3]) angepasst werden, bei dem sowohl die Eventhöhen als auch die Eventanzahlen pro Jahr modelliert werden, ggf. mit einem Modell für einen Inflationierungstrend, falls die Informationen nicht regelmäßig aktualisiert zur Verfügung stehen.

2.1.1 Verteilung der Eventhöhen

Die Schadenaufwendungen der rückversicherungsrelevanten Events müssen zunächst einmal auf das aktuelle Bezugsjahr inflationiert werden. Diese Inflationierung kann additiv, multiplikativ oder in einer Kombination aus beiden Ansätzen erfolgen.

Weiterhin muss eine Exposureangleichung auf das aktuelle Bezugsjahr erfolgen. Diese kann erfolgen, indem man bezogen auf eine Exposureeinheit rechnet oder die Exposures der einzelnen Jahre auf das (ggf. geschätzte) Exposure des Bezugsjahres anpasst.

In der nachfolgenden Tabelle ist ein Auszug aus den derart aufbereiteten Eventschadenhöhen für die verwendeten fiktiven Beispieldaten aufgelistet.

Event Nr.	Quantil	Schaden-höhen
Erw.		**113,9**
Std.		**262,4**
1	0,00%	11,8
8	5,00%	19,4
15	10,00%	23,1
36	25,00%	33,7
71	50,00%	55,0
106	75,00%	120,2
127	90,00%	213,8
134	95,00%	260,7
135	95,71%	260,7
136	96,43%	402,7
137	97,14%	413,3
138	97,86%	520,1
139	98,57%	533,7
140	99,29%	600,5
141	100,00%	2.973,5

Abbildung 1: Revalorisierte und Exposureangepasste Eventhöhen in Mio. €.

Bei der Verteilungsanpassung dieser Eventschadenhöhen wurde eine stetige „customized" Verteilung (= Histogramm) wie folgt modelliert:

- Es wurden 11 Quantile übereinstimmend mit den entsprechenden Quantilen der diskreten empirischen Verteilung gewählt.
- Minimum und Maximum der customized Verteilung wurden anschließend (durch Zielwertsuche) derart ermittelt, dass Mittelwert und empirische Standardabweichung der diskreten empirischen Verteilung reproduziert wurden.
- Die Auswahl der 11 Quantile erfolgte derart, dass die oberen Quantile gut reproduziert wurden. Im unteren Bereich wurden die Quantile derart gewählt, dass das Minimum der empirischen Verteilung gut reproduziert wurde.

Die Auswahl der 11 Quantile für den Marktschadenbedarf in Mio. € und den Schadenbedarf je einzelner Exposureeinheit in € ist in der nachfolgenden Tabelle illustriert:

Quantile	Schaden Höhe	Schaden Bedarf
Erw.	113,9	2,65
Std.	262,4	6,11
0,00%	12,0	0,3
40,00%	45,6	1,1
50,00%	55,0	1,3
85,00%	163,9	3,8
90,00%	213,8	5,0
95,00%	260,7	6,1
95,71%	260,7	6,1
96,43%	402,7	9,4
97,14%	413,3	9,6
97,86%	520,1	12,1
98,57%	533,7	12,4
99,29%	600,5	14,0
100,00%	4.846,3	112,9

Abbildung 2: Customized Verteilungsanpassung.

Im Vergleich zur empirischen Verteilung liefert diese Form einer customized Verteilungsanpassung noch einen „Auslauf" für sehr hohe Events, die noch möglich sind, aber bisher noch nicht beobachtet wurden – wenngleich diese dann natürlich nur äußerst selten modelliert werden. Im Unterschied zu einer klassischen Anpassung beispielsweise mit einer Paretoverteilung ist dieser Verteilungsauslauf aber nach oben begrenzt.

Da diese Form einer Verteilungsanpassung ziemlich viele der empirischen Quantile reproduziert, liefert sie natürlich auch relativ gute QQ-Plots der empirischen Quantile gegen die angepassten Quantile, siehe dazu die nachfolgenden Abbildungen:

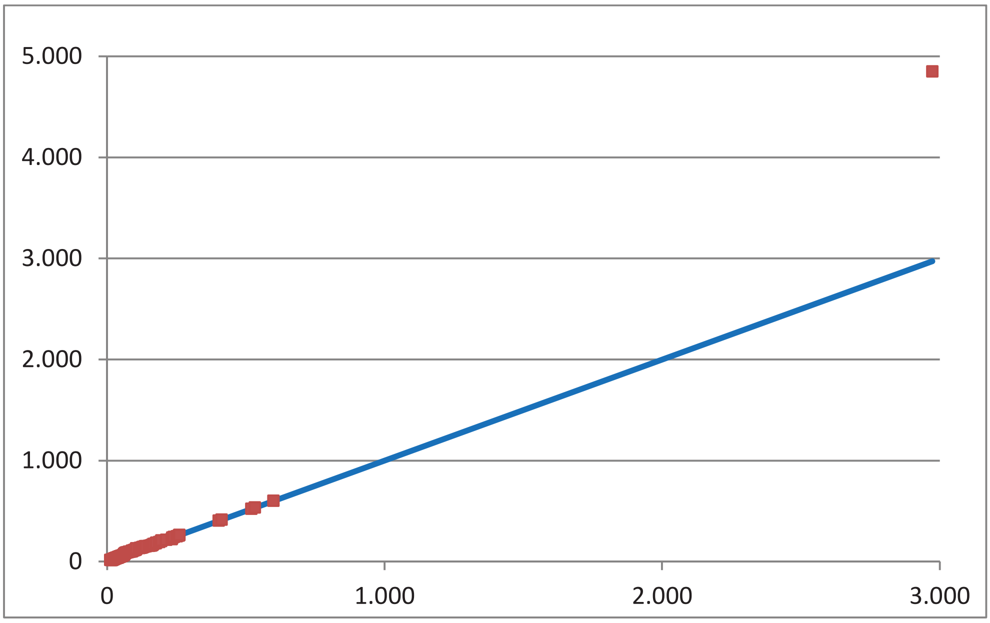

Abbildung 3: QQ-Plots der Eventschadenhöhen (1).

Aus einer globalen Sicht weist die Anpassung eigentlich nur sehr hohe Abweichungen beim letzten „Beobachtungspunkt" auf; dies war aber genau der gewünschte „Auslauf" Effekt dieser Verteilungsanpassung.

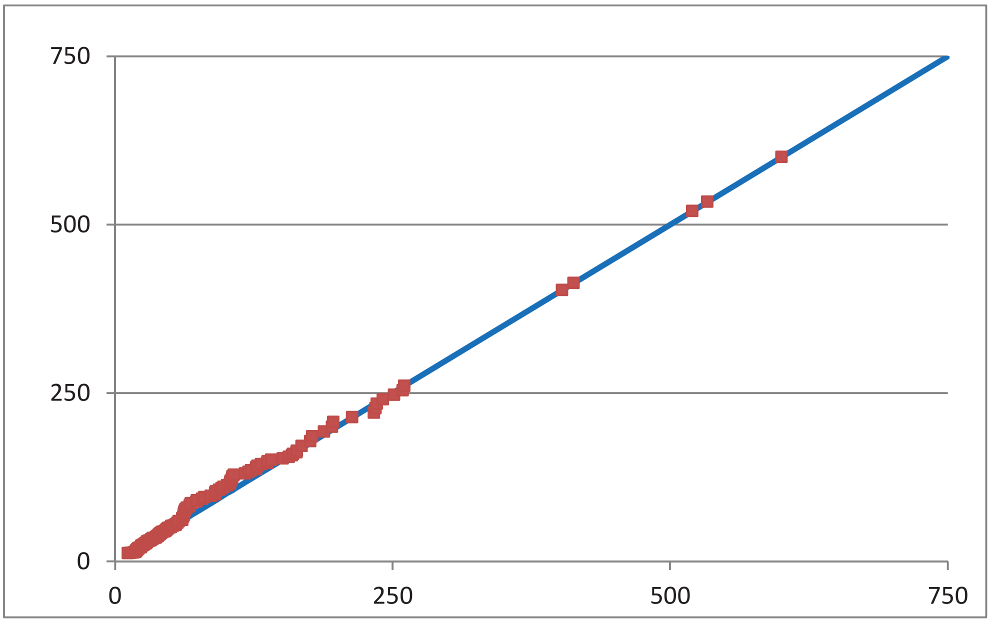

Abbildung 4: QQ-Plots der Eventschadenhöhen (2).

Mit Ausnahme der Maxima beider Verteilungen sind die obersten Quantile aufgrund der Vorgehensweise bei der Verteilungsanpassung exakt getroffen; die meisten Eventschadenhöhen fallen jedoch deutlich niedriger aus.

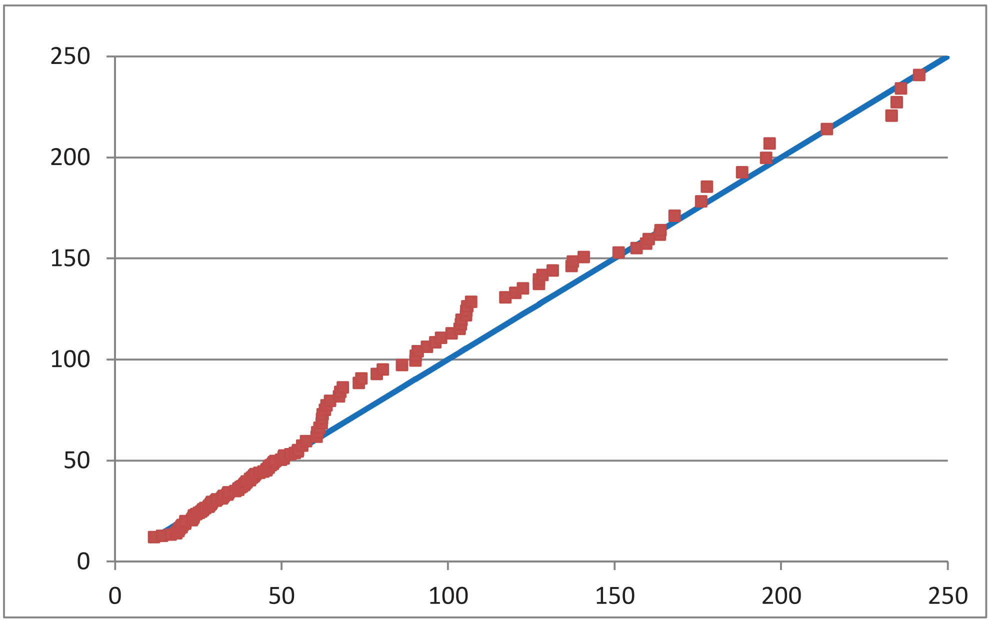

Abbildung 5: QQ-Plots der Eventschadenhöhen (3).

Auch die weiteren oberen Quantile sind recht gut getroffen. Abweichungen (wenn auch nicht besonders markant) beobachtet man eher bei kleineren und mittleren Quantilen, die allerdings für eine Rückversicherungsoptimierung von geringerem Interesse sind.

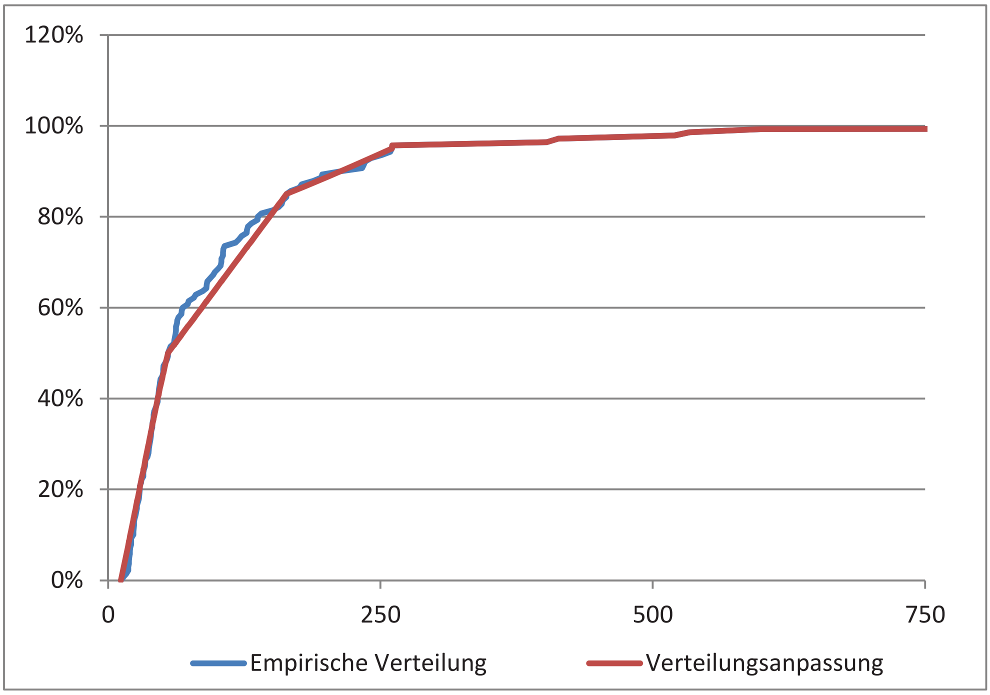

Abbildung 6: Verteilungsfunktion der Eventschadenhöhen.

Wie aus der obigen Abbildung ersichtlich, ist die Verteilung sehr rechtsschief, d. h. viele Events sind von geringer bis mittlerer Intensität, aber einige wenige Events fallen extrem hoch aus.

2.1.2 Verteilung der Eventanzahl

Bei der Eventanzahl kann man – sofern sich das Gebiet nicht geändert hat, auf das sich die Events erstrecken – zunächst einmal auf Basis der empirisch beobachteten Werten über einen möglichst langen Zeitablauf Mittelwert und Varianz schätzen.

Für eine erwartungstreue Schätzung muss bei der Varianz mit dem Korrekturfaktor $1 - \sum w_i^2$ gearbeitet werden, w_i die Gewichte der jeweiligen Eventanzahlen im Beobachtungszeitraum. Da bei den fiktiven Beispieldaten die empirische Varianz fast mit dem Erwartungswert übereinstimmte, konnte man ohne weiteres für die Verteilungsanpassung eine Poission Verteilung wählen. Im vorliegen Fall wurde die Poisson Verteilung allerdings leicht modifiziert, um (bei gleichem Parametern wie bei der empirischen Verteilung) die Anzahl der Events auf 15 zu begrenzen.

Anzahl	empirisch	Poisson	mod. Poisson
Erw. Std.			
0	0,0%	0,4%	0,4%
1	4,8%	2,6%	2,6%
2	4,8%	8,7%	8,7%
3	14,3%	19,9%	20,0%
4	38,1%	35,4%	35,5%
5	47,6%	52,5%	52,6%
6	76,2%	68,2%	68,4%
7	76,2%	80,7%	80,9%
8	90,5%	89,2%	89,5%
9	95,2%	94,5%	94,7%
10	100,0%	97,4%	97,7%
11	100,0%	98,9%	98,4%
12	100,0%	99,5%	99,0%
13	100,0%	99,8%	99,4%
14	100,0%	99,9%	99,8%
15	100,0%	100,0%	100,0%

Abbildung 7: Verteilungsanpassungen für die Eventhäufigkeiten (1).

Diese Modifikation ist dadurch begründet, dass alternativ zu einem klassischen Simulationsansatz auch ein fixierter Ansatz mit einer Event Loss Tabelle gerechnet werden kann. Durch die Begrenzung auf 15 Events kann die dem fixierten Ansatz zugrunde liegende Event-Loss-Table in ihrer Größe signifikant begrenzt werden.

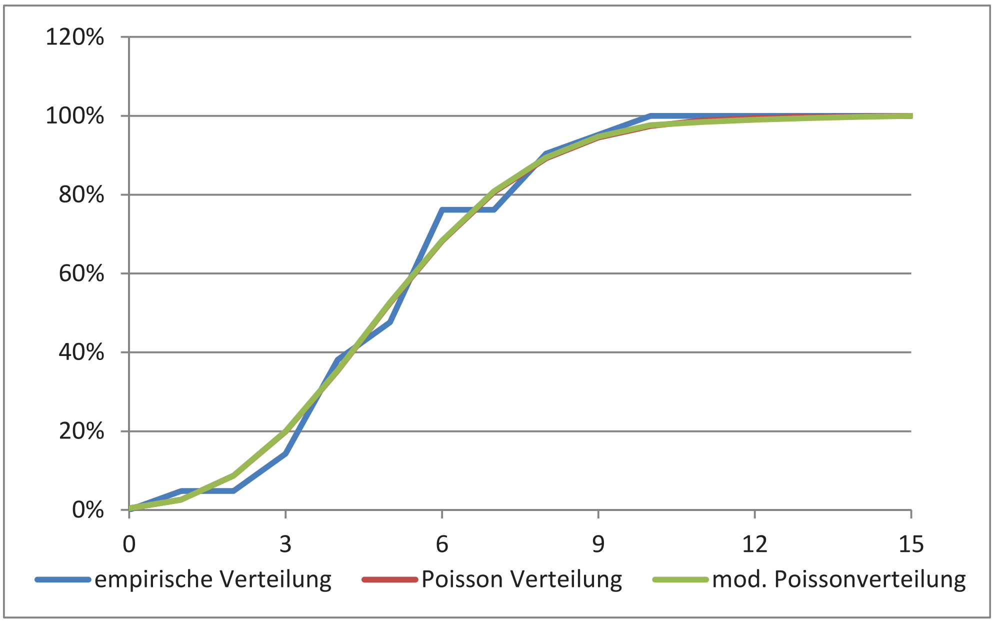

Abbildung 8: Verteilungsanpassungen für die Eventhäufigkeiten (2).

Wie man der obigen Abbildung entnehmen kann, gibt es zwischen der Poisson Verteilung und deren Modifikation keine (visuell) erkennbaren Unterschiede. Die empirische Verteilung hingegen (die alles in allem gut repliziert wird) ist allerdings deutlich weniger glatt als die Anpassungen.

Unter Anwendung des kollektiven Modells ergaben sich für den „**Großschadenbedarf**" $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ mit N stochastisch, X_i identisch verteilt und paarweise unabhängig bzw. unabhängig zu N, die folgenden modellierten Verteilungsparameter in € (bezogen auf eine einzelne Exposureeinheit):

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N] \cdot E[X] \\ &= 5{,}52 \cdot 2{,}65 \\ &= 14{,}66 \\ STD[S] &= (E[N] \cdot VAR[X] + E[X]^2 \cdot VAR[N])^{1/2} \\ &= (5{,}52 \cdot 6{,}11^2 \quad + 2{,}65^2 \cdot 2{,}38^2)^{1/2} \\ &= 15{,}70. \end{aligned}$$

2.2 Schadenbedarf insgesamt

Der „**Basisschadenbedarf**" Y für alle anderen nicht rückversicherungsrelevanten Ereignisse wurde als Gesamtschadenbedarf modelliert, wobei vereinfacht mit einer Lognormalverteilung gearbeitet wurde. Dies ist dahingehend begründet, dass die Verteilungsanpassung nicht rückversicherungsrelevanter Ereignisse keine Auswirkungen auf die Rückversicherungsoptimierung hat und somit von geringerer Bedeutung ist.

Aggregiert man die beiden zuvor parametrisierten und modellierten Verteilungen (unter einer Unabhängigkeitsannahme), dann ergeben sich die Verteilungsparameter für den **gesamten Schadenbedarf** SB = S + Y wie folgt:

$$\begin{aligned} E[SB] &= E[S] \quad + E[Y] \\ STD[SB] &= (STD[S]^2 + STD[Y]^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Sofern man das Gesamtmodell anhand eines anderen Modells kalibrieren möchte, kann man ggf. die Parameter der (weniger relevanten) Basisschadenverteilung geeignet anpassen.

3 Modellansatz

Nachfolgend wird zunächst der klassische Simulationsansatz erläutert. Ergänzend dazu wird in einem weiteren Abschnitt skizziert, wie man alternativ das Modell auch auf Basis von Event Loss Tabellen aufbauen kann.

3.1 Simulationsmodell

Beim Simulationsansatz werden mit einem geeigneten Tool Simulationen auf Basis der jeweiligen Verteilungsanpassungen durchgeführt. Ein mögliches Simulationstool ist dabei der EXCEL Zufallszahlengenerator zur Generierung einer Einzelsimulation kombiniert mit einem Visual Basic Programm zur Durchführung eines gesamten Simulationslaufs.

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass sie im Prinzip ohne weitere zusätzliche Infrastruktur mit der üblichen Transparenz und Flexibilität einer EXCEL Lösung durchgeführt werden kann. Aus diesem Grund basieren die nachfolgenden Ausführungen auch auf diesem Modellansatz. Auf der anderen Seite entspricht die Qualität der EXCEL Zufallszahlengenerator nicht immer der Qualität von Zufallsgeneratoren spezieller Simulationssoftwarelösungen. Darüber hinaus werden in professionellen Softwarelösungen häufig schon allgemeine Module zur Problemlösung im individuellen Fall bereitgestellt, so dass eine aufwendige und ggf. fehleranfällige Eigenprogrammierung größtenteils vermieden werden kann.

Auf die simulierten Ergebnisse können dann weitere Funktionen angewendet werden, wie z. B. die Anwendung einer Rückversicherungsstruktur auf simulierte Bruttoaufwände. Dabei entspricht der Detailgrad der simulierten Bruttoaufwände dem Detailgrad der Rückversicherungsstruktur, die angewendet und somit getestet werden kann. Gerade bei einer Rückversicherungslösung, die nur bei extremen Schadenaufwänden wirkt, zeigt sich erst bei der Betrachtung von ausreichend vielen Simulationen die wahre Auswirkung.

Auf Basis der im vorherigen Abschnitt vorgenommenen Verteilungsanpassungen kann zunächst einmal ein Marktmodell konzipiert werden. Für eine unternehmensspezifische Betrachtungsweise wird man dieses geeignet modifizieren müssen.

3.1.1 Marktmodell

Auf Basis der zuvor durchgeführten Parametrisierungen und Verteilungsanpassungen kann nun eine Simulationsanalyse mit einem Frequency / Severity Ansatz für die Großschadenereignisse und einem Gesamtschadenmodell für den Rest durchgeführt werden.

Sämtliche Verteilungsanpassungen basieren in der Regel auf einem Basisjahr für die Modellierung. Sofern keine regelmäßige Modellaktualisierung stattfinden kann, muss für Folgejahre eine Inflationsanpassung vorgenommen werden, optimaler Weise mit dem gleichen Inflationierungsmodell wie bei der Revalorisierung der Daten aus der Vergangenheit.

Da für eine unternehmensspezifische Rückversicherungsoptimierung nur das Exposure des Unternehmens benötigt wird, kann man auch auf Marktebene mit dem Schadenbedarf für eine Exposureeinheit rechnen, was dann die Exposureanpassung auf Marktebene vermeidet.

Dieses Marktmodell kann aber nur dann auf ein Unternehmen angewendet werden, falls sich die unternehmensindividuelle Exponierung stark mit der marktweiten Gefährdung deckt. Für stark regionalisierte Unternehmen liefert ein derartiges Modell aber verfälschte Ergebnisse, beispielweise wenn das Portfolio des Unternehmens in einigen sehr schadenträchtigen Regionen konzentriert ist.

3.1.2 Unternehmensspezifisches Modell

Sofern ein Unternehmen nicht (näherungsweise) als eine „Kopie" des Marktes angesehen werden kann, muss die Regionalstruktur des Unternehmens geeignet in das Modell einbezogen werden, beispielsweise in Form einer Aufteilung des Exposures auf geeignet definierte Regionalbezirke (z. B. anhand der Postleitzahl).

Für ein VU individuelles Simulationsmodell mit individueller Verteilung für Eventanzahl, Eventhöhen und Gesamtschadenaufwand für die Basisschäden benötigt man mindestens

- eine Trefferwahrscheinlichkeit P_{VU} für die Eventanzahl,
- einen Schadenhöhenindex $I_{X, VU}$ für die Eventschadenhöhe und
- einen Schadenbedarfsindex $I_{Y, VU}$ für den Basisschadenaufwand.

Auf dieser Basis erhält man einen Schadenbedarfsindex für die Großschadenereignisse als Produkt

$$I_{S, VU} = P_{VU} \cdot I_{X, VU}.$$

Dieser stimmt i. d. R. nicht mit dem Schadenbedarfsindex $I_{Y, VU}$ für den Basisschadenaufwand überein.

Unter Umständen ist es jedoch einfacher, den VU individuellen Schadenbedarfsindex $I_{S, VU}$ zuerst zu ermitteln, um dann anschließend $I_{X, VU}$ daraus abzuleiten.

Sobald nämlich der Schadenaufwand (für Großschadenereignisse, sonstige Ereignisse oder insgesamt) je Regionalbezirk / Distrikt D geschlüsselt werden kann, erhält man auf dieser Basis einen regionalen Schadenbedarfsindex $I_{SB, D}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} I_{SB, D} &= SB_D / SB \\ &= (Auf_D / EXP_D) / (Auf / EXP) \end{aligned}$$

mit Auf_D (bzw. Auf) der Aufwand und EXP_D (bzw. EXP) das Exposure des Regionalbezirkes / Distrikts (bzw. des gesamten Marktes). Zur Stabilisierung können hier ggf. Mehrjahreswerte herangezogen werden.

Sofern $w_{VU, D}$ den Exposureanteil eines Versicherungsunternehmens im Regionalbezirk / Distrikt D bezeichnet, dann ergibt sich der VU-spezifische Schadenbedarfsindex wie folgt:

$I_{SB, VU} \quad = \sum_D I_{SB, D} \cdot w_{VU, D}$.

In diesem rein empirischen Index sind Korrelationen zwischen den Regionalbezirken / Distrikten implizit abgebildet, so dass man keine (ggf. künstlichen) Korrelationsannahmen mehr benötigt.

Der Schadenbedarfsindex kann per Definition über, unter oder bei 100% liegen, ebenso wie ein klassischer Frequenzindex, sofern dieser als Häufigkeit pro Exposureeinheit (und somit als Intensität pro Exposureeinheit) definiert wird.

Im vorliegenden Modell soll jedoch die absolute Anzahl von rückversicherungsrelevanten Events pro Jahr modelliert werden, von denen es bei einem einzelnen Unternehmen in keinem Fall mehr geben kann, als man für den gesamten Markt beobachtet. Insofern ist es sachdienlicher, mit einer „Trefferwahrscheinlichkeit“

$P_{VU} \quad = N_{VU} / N$

zu arbeiten, N die Anzahl aller Events und N_{VU} die Anzahl derjenigen Events, die das Unternehmen getroffen haben. Aus der Beziehung

$I_{S, VU} \quad = I_{X, VU} \cdot P_{VU}$

ergibt sich dann die Definition eines Schadenhöhenindexes. Am folgenden Beispiel sollen die so definierten Indizes erläutert werden. Dazu werden folgende Indexwerte betrachtet:

$P_{VU} \quad = \ 20\%$

$I_{S, VU} \quad = 100\%$.

In diesem Fall werden für das betrachtete Beispielunternehmen im Schnitt nur 20% der gesamten Events pro Jahr beobachtet, d. h. bei geschätzten 5,52 Events für den gesamten Markt nur ca. 1,10 im Schnitt pro Jahr.

Dennoch ist der Schadenbedarfsindex für die Großschadenereignisse im vorliegenden Fall identisch mit dem Schadenbedarfsindex des gesamten Marktes, d. h. die wenigen Events treffen das Unternehmen (in Relation zu seinen gesamten Exposureeinheiten) im Schnitt fünfmal stärker als die gesamten Events den Markt treffen.

Der Markt insgesamt wird also von mehr Events getroffen, da diese sich aber weitflächig verteilen, ist die Intensität bezogen auf eine einzelne Exposureeinheit eher gering. Im vorliegen Fall gilt für das Beispielunternehmen folglich

$I_{X, VU} \quad = 500\%$.

Bleibt zu erwähnen, dass für dieses Unternehmen der Schadenbedarfsindex $I_{Y, VU}$ für die restlichen Nat Cat Schadenaufwände nicht notwendigerweise 100% sein muss.

Zur Vereinfachung des nachfolgenden Formelwerkes soll folgende verkürzte Notation angewendet werden:

N, N*	Anzahl der Events	des Marktes bzw. VU spezifisch
X, X*	Eventschadenhöhen	des Marktes bzw. VU spezifisch
S, S*	Großschadenbedarf	des Marktes bzw. VU spezifisch

Y, Y^* Basisschadenbedarf des Marktes bzw. VU spezifisch

Bezeichnet man ebenfalls zur Vereinfachung mit $P = P_{VU}$ die VU individuelle Trefferwahrscheinlichkeit, dann kann man mit dieser Notation ein VU spezifisches Modell wie folgt konzipieren:

N^*	$= \sum_{k \leq N} B_{P,k}$	$B_{P,k}$ Binomial Verteilungen, P die Trefferwahrscheinlichkeit
X^*	$= X \cdot I_X$	I_X der Eventhöhenindex
Y^*	$= Y \cdot I_Y$	I_y der Basisschadenbedarfsindex

Die Eventhöhen- sowie die Basisschadenbedarfsmodellierung erfolgt dabei proportional entsprechend der definierten Indizes. Bei der Modellierung der (diskreten) Eventanzahlen ist ein solch einfacher Ansatz nicht möglich; hier muss bei jedem gezogenen Event gemäß der individuellen Trefferwahrscheinlichkeit noch modelliert werden, ob ein Marktevent auch das Unternehmen trifft. Sofern dies jeweils unabhängig voneinander vorgenommen wird, gelten folgende Beziehungen:

$$E[N^*] = E[N] \cdot P$$

$$VAR[N^*] = E[N] \cdot P \cdot (1 - P) + P^2 \cdot VAR[N]$$

$$CV[N^*]^2 = (1/P - 1) / E[N] + CV[N]^2$$

Sofern $P \neq 1$ gilt, ist die Volatilität des VU spezifischen Eventanzahlmodells höher als diejenige des Marktmodells – desto höher, je kleiner P ist. Kombiniert man das (nichtproportionale) Modell für die Eventanzahl mit dem (proportionalen) Eventhöhenmodell, so ergeben sich für den VU spezifischen Großschadenbedarf folgende Parameter:

$$\begin{aligned} E[S^*] &= E[N^*] \cdot E[X^*] \\ &= E[N] \cdot P \cdot E[X] \cdot I_X \\ &= E[S] \cdot I_S \\ VAR[S^*] &= E[N] \cdot P \cdot VAR[X] \cdot I_X^2 + (E[X] \cdot I_X)^2 \cdot (E[N] \cdot P \cdot (1 - P) + P^2 \cdot VAR[N]) \\ &= (E[N] \cdot (VAR[X] / P + E[X]^2 \cdot (1/P - 1)) + E[X]^2 \cdot VAR[N]) \cdot I_S^2 \\ &= (E[N] \cdot (VAR[X] + E[X]^2) \cdot (1/P - 1) + VAR[S]) \cdot I_S^2 \\ CV[S^*]^2 &= (1/P - 1) \cdot (CV[X]^2 + 1) / E[N] + CV[S]^2 \end{aligned}$$

Für $P \neq 1$ ist die Volatilität des VU spezifischen Schadenbedarfs für Großschadenereignisse höher als die Volatilität des Marktschadenbedarfs.

Aufgrund des rein proportionalen Modellansatzes beim Basisschadenbedarf ändert sich hier nichts an der Volatilität.

Insgesamt ergibt sich also, dass die VU spezifische Volatilität ansteigt, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit ungleich 100% ist.

Der VU spezifische Modellansatz modelliert VU spezifische Erwartungswerte und Standardabweichungen.

Ein Simulationsansatz kann relativ einfach erstellt werden und ist dann auch sehr flexibel im Hinblick auf die denkbaren Anwendungen. Auf der anderen Seite ist (z. B. bei EXCEL) das Laufzeitverhalten nicht immer optimal. Der größte „Nachteil" eines Simulationsanasatzes liegt aber darin, dass bei gleichem Input keinesfalls gleiche, sondern nur „ähnliche" Outputs herauskommen. Dies ist – gerade Nichtmathematikern gegenüber – nicht immer einfach zu kommunizieren.

Gleiche Outputs bei gleichen Inputs erhält man beispielsweise, wenn man ein festes Set von Zufallszahlen einliest und verarbeitet. Dies ändert aber nichts Wesentliches am Laufzeitverhalten.

Eine andere Alternative besteht darin, die wichtigsten Outputs eines Simulationslaufes zu fixieren und darauf die gewünschten Funktionalitäten anzuwenden. Dieser Ansatz soll später noch skizziert werden.

3.1.3 Unternehmensspezifisches Volatilitätsmodell

Typischerweise erhöht sich die Unternehmensspezifische Volatilität im Vergleich zur Marktvolatilität aufgrund der geringeren „Ausgleichsmöglichkeiten" (= Diversifizierung, siehe dazu auch [4]). Dabei gibt es im Wesentlichen zwei Quellen für eine Erhöhung der Volatilität (beispielsweise ausgedrückt als Variationskoeffizient):

1. Geringeres Exposure im Vergleich zum Marktexposure und
2. höhere Konzentration im Vergleich zur Marktkonzentration.

Im zuvor beschriebenen Modellansatz wird eine Volatilitätserhöhung nur beim Eventanzahlmodell abgebildet, nicht aber im Eventhöhenmodell; die Größe des Exposures spielt keine Rolle. Sofern für die Trefferquote $P = 1$ gilt, ergibt sich kein Volatilitätseffekt. Dies ist nicht in jedem Fall realistisch, da sich auch unterschiedliche Eventhöheneffekte aus einer sehr atypischen Konzentration der Exposureeinheiten ergeben können.

In diesem Abschnitt soll skizziert werden, wie man ein sinnvolles Modell für Volatilitätseffekte beim Eventhöhenmodell konzipieren kann (in Anlehnung an [5]). Dazu betrachtet man den Marktschadenbedarf für Großschadenereignisse über alle Regionalbezirke / Distrikte D:

$$S \quad = \sum w_D \cdot S_D \quad =: \sum w_D \cdot I_{S,D} \cdot S°_D \quad =: \sum v_D \cdot S°_D$$

mit $\sum w_D = \sum v_D = 1$. Die regionalen Schadenbedarfe sind also bis auf den Regionalindex $I_{S,D}$ Realisationen eines durchschnittlichen Schadenbedarfs S°. Falls man also davon ausgeht, dass die Durchschnittsbedarfe $S°_D$ unabhängig und identisch verteilt sind mit den Parametern μ und σ^2, dann ist die Gewichtung S erteilt mit den Parametern μ und $\sum (v_D)^2 \cdot \sigma^2$, wobei $1/n \le \sum (v_D)^2 \le 1$ gilt. Der kleinste Werte wird bei einer Gleichverteilung und der größte Wert bei einer extremen Konzentration angenommen.

Bei einer abweichenden Konzentration $S^* = \sum w^*_D \cdot S_D = \sum w^*_D \cdot I_{S,D} \cdot S°_D$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$E[S^*] \quad = I_S \cdot \mu \qquad \text{mit } I_S \quad = \sum w^*_D \cdot I_{S,D}$$

$$VAR[S^*] = I_S^2 \cdot \sum (v^*_D)^2 \cdot \sigma^2 \qquad \text{mit } v^*_D = w^*_D \cdot I_{S,D} / I_S$$

Setzt man dies in Bezug zum Marktschadenbedarf S, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$E[S^*] = I_S \cdot E[S]$$

$$VAR[S^*] = I_S^2 \cdot VAR[S] \cdot (1 + k)$$

mit $(1 + k) = \sum (v^*_D)^2 / \sum (v_D)^2$ der Volatilitätseffekt bedingt durch unterschiedliche Konzentrationen. Um nicht permanent die exakte Marktverteilung nachkarten zu müssen, wird im Folgenden vereinfacht davon ausgegangen, dass die Marktverteilung in der Regel relativ gleichförmig ist und somit $\sum (v_D)^2$ nahe bei $1/n$ liegt, so dass approximativ $k = n \cdot \sum (v^*_D)^2 - 1$ angenommen werden kann. Dadurch wird k gegebenenfalls etwas überschätzt; die Formeln sind dann aber einfacher.

Der Parameter k hängt nur von der Verteilung des Exposures ab und nicht von der Eventtrefferquote, wobei aber relativ einleuchtend ist, dass bei einer hohen Konzentration das Unternehmen auch seltener von signifikanten Ereignissen getroffen wird. Extrem bizarre Verteilungen (beispielweise alle Exposureeinheiten in einem Bezirk bis auf jeweils eine einzige Exposureeinheit in den anderen Zulassungsbezirken und somit $P = 1$) kann dieser Ansatz allerdings nicht perfekt abfangen; hier kommt jedoch so ziemlich jedes vereinfachte Modell an seine natürlichen Grenzen.

Bei einer Schadensummenverteilung ergibt sich der Gesamtvolatilitätseffekt aus einem Volatilitätseffekt bei der Eventanzahl (welcher für eine Trefferquote $P < 1$ bereits modelliert wurde) und einem Volatilitätseffekt bei der Eventhöhe.

Das zuvor beschriebene Modell für die Eventhöhen kann man jetzt erweitern, indem man beispielsweise $X^* = X \cdot I_X \cdot I^*$ setzt, I^* Lognormalverteilt mit den Parametern 1 und τ^2 sowie unabhängig zu X, so dass man

$$\begin{aligned} VAR[X^*] &= I_X^2 \cdot (VAR[X] \cdot (1 + \tau^2) + E[X]^2 \cdot \tau^2) \\ &= I_X^2 \cdot VAR[X] \cdot (1 + \tau^2 \cdot (1 + CV[X]^{-2})) \\ &= I_X^2 \cdot VAR[X] \cdot (1 + \delta) \end{aligned}$$

erhält, wobei $\delta > 0$ sowie $\delta = \delta_{P,k}$ gilt. Für $\tau = 0$ und damit auch $\delta = 0$ ergibt sich die bereits erläuterte Multiplikation mit dem Eventhöhenindex I_X ohne zusätzlichen Volatilitätseffekt bei den Eventhöhen.

Im Folgenden sollen die Beziehungen zwischen δ, k und P illustriert werden. Zunächst einmal gilt wie zuvor $I_S = I_X \cdot P$. Weiterhin gilt für die unternehmensindividuelle Eventanzahl

$$E[N^*] = P \cdot E[N]$$

$$VAR[N^*] = P^2 \cdot VAR[N] \cdot (1 + \lambda)$$

mit $\lambda = \lambda_P = (1/P - 1) \cdot E[N] / VAR[N]$. Sämtliche Überlegungen kann man jetzt wie folgt zusammenfassen:

$$E[S^*] = I_S \cdot E[N] \cdot E[X]$$

$$VAR[S^*] = P^2 \cdot I_X^2 \cdot (1 + k) \cdot (E[N] \cdot VAR[X] + E[X]^2 \cdot VAR[N])$$

$$= E[N^*] \cdot VAR[X^*] + E[X^*]^2 \cdot VAR[N^*]$$

$$= P \cdot I_X^2 \cdot (1 + \delta) \cdot E[N] \cdot VAR[X] + P^2 \cdot I_X^2 \cdot (1 + \lambda) \cdot E[X]^2 \cdot VAR[N]$$

Diesen Ausdruck kann man nun wie folgt nach dem Volatilitätseffekt δ für die Eventhöhen auflösen:

$$(1 + \delta) \qquad = P \cdot ((1+ k) + (k - \lambda) \cdot E[X]^2 \cdot VAR[N] / (E[N] \cdot VAR[X]),$$

wobei $P \cdot \lambda \cdot E[X]^2 \cdot VAR[N] / (E[N] \cdot VAR[X]) = (1 - P) / CV[X]^2$ gilt. Somit kann man wie folgt zusammenfassen:

$$\delta \qquad = P - 1 + P \cdot k \cdot (1 + E[N] \cdot (CV[N]^2 / CV[X])^2) - (1 - P) / CV[X]^2$$

$$= P \cdot k \cdot (1 + E[N] \cdot CV[N]^2 / CV[X]^2) - (1 - P) \cdot (1 + 1/CV[X]^2)$$

$$= P \cdot k \cdot (1 + a) - (1 - P) \cdot (1 + b)$$

Der erste Term in dieser Gleichung ist immer positiv, der zweite Term ist immer negativ, wobei die Parameter a und b nur von den Verteilungsparametern der Eventanzahl und der Eventhöhe abhängen. Insgesamt soll $\delta \geq 0$ gelten.

Für $P = 1$ ergibt sich der Volatilitätseffekt bei der Eventhöhe ausschließlich aus der Konzentration der Exposureeinheiten und den Verteilungsparametern der Eventanzahl und der Eventhöhe. Für $P < 1$ muss aufgrund der Definition in jedem Fall $k > 0$ gelten, d. h. es muss

$$P \cdot k \cdot (1 + a) \geq (1 - P) \cdot (1 + b)$$

gelten. Mit den Parametrisierungen des vorliegend Modells ergeben sich für folgende Werte:

$$E[N] = 5{,}52$$

$$CV[N] = 43{,}1\%$$

$$CV[X] = 230{,}4\%$$

$$1 + a = 1 + 5{,}52 \cdot (43{,}1\% / 230{,}4\%)^2 = 1{,}194$$

$$1 + b = 1 + 1 / 230{,}4\%^2 = 1{,}188$$

Auf Basis dieser Werte ergeben sich die nachfolgenden Ungleichungen:

$$k \geq (1/P - 1) \cdot (1 + b) / (1 + a)$$

$$\geq (1/P - 1) \cdot 0{,}996$$

$$P \geq (1 + 1{,}004 \cdot k)^{-1}$$

Bei insgesamt n Regionalbezirken / Distrikten gilt $k \leq n - 1$, woraus dann eine Mindestabschätzung für P resultiert. Geht man davon aus, dass jeder Bezirk von mindestens einem Event getroffen wird, so gilt im vorliegenden Fall $P \geq 1/141$ und man muss nur überprüfen, ob die Ungleichung

$$1/141 \geq (1 + 1{,}004 \cdot k)^{-1} \qquad \text{bzw.}$$

$$140 \leq 1{,}004 \cdot k \leq 1{,}004 \cdot (n - 1) \qquad \text{bzw.}$$

$$n \geq 0{,}996 \cdot 140 - 1$$

erfüllt ist, was bei mehr als 139 Regionalbezirken immer der Fall ist. Bei weniger Regionalbezirken kann man in jedem Fall

$$\delta \quad = \max\left(P \cdot k \cdot (1 + a) \;\; - (1 - P) \cdot (1 + b); 0\right)$$

setzen. Für $\delta = 0$ wird dann nur die im vorherigen Abschnitt beschriebene Volatilitätsanpassung für die Eventanzahl durchgeführt. Die zuvor gerechneten Ungleichungen zeigen, dass es bei ausreichend vielen Regionalbezirken / Distrikten n einen hierzu zulässigen Konzentrationsparameter $k^* \geq k$ mit $k^* \leq k_{max} = n - 1$ gibt.

Der hier beschriebene Volatilitätsansatz für die Eventhöhen ist in den Beispielrechnungen im nächsten Kapitel nicht abgebildet.

3.2 Event Loss Tabellen

Um alle Funktionalitäten und Modelle so wie zuvor skizziert rechnen zu können, muss man für einen (ausreichend großen!) Simulationslauf pro Simulation i mit N(i) simulierten Marktevents folgende Werte festhalten:

- Eventschadenhöhen X(i, j) pro Exposureeinheit für alle $j \leq N(i)$,
- Zufallszahlen Z(i, j) für alle $j \leq N(i)$ für die Anwendungen der Binomialverteilungen
- Basisschadenbedarfe Y(i).

Für jedes individuelle Unternehmen mit Trefferwahrscheinlichkeit P kann man dann folgende VU spezifischen Werte pro Simulation i (im Sinne einer festen Formel) rechnen:

$B_P(i, j)$	$= (Z(i, j) \geq 1 - P) \cdot 1$	Indikator, ob das Event j das VU getroffen hat.
$S^*(i, j)$	$= X(i, j) \cdot I_X \cdot B_P(i, j) \cdot EXP$	VU spezifische Eventhöhe für das Event j.
$S^*(i)$	$= \sum S^*(i, j)$	VU spezifischer Großschadenbedarf
$Y^*(i)$	$= Y(i) \cdot I_Y \cdot EXP$	VU spezifischer Basisschadenbedarf.

Sofern man also die benötigten Ergebnisse in einer festen Datei abgespeichert hat, kann man eine Rückversicherungsstruktur als eine feste Formel anwenden und bekommt bei gleichen Inputs auch immer gleiche Outputs. Da man ausreichend viele Simulationen (z. B. 20.000) für aussagekräftige Ergebnisse braucht, sind die Outputdateien mit den Event Loss Tabellen u. U. sehr groß. Aus diesem Grund wurden bei der Eventmodellierung die Poisson Verteilung derart modifiziert, dass die Eventanzahl auf 15 begrenzt wurde. Unter Modellierungsgesichtspunkten war dies unerheblich, verringerte aber die Größe der Outputdatei signifikant.

Sofern man mit einer festen Ergebnisdatei arbeitet, begrenzt man andererseits auch die Flexibilität der Anwendungen. Größere Modelländerungen sind hier nicht ohne weiteres durchführbar. Hier benötigt man ggf. wieder einen neuen Simulationslauf mit einer geänderten Outputstruktur.

In der folgenden Tabelle sind die Vor- und Nachteile unterschiedlicher Lösungsansätze noch einmal zusammengefasst.

Lösungsansatz	Vorteile	Nachteile
Freier Simulationsansatz	• Hohe Flexibilität • Einfache Programmie-rung	• Laufzeitverhalten • Keine Ergebnisidentität
Fester Zufallszahleninput	• Flexibilität • Ergebnisidentität	• Laufzeitverhalten • Zusatzprogrammierung
Feste Outputtabelle	• Bessere Laufzeiten • Ergebnisidentität	• Weniger Flexibilität • Zusatzprogrammierung • Dateigröße

Ein freier Simulationsansatz kann am schnellsten umgesetzt werden und erfordert keine zusätzlichen Programmkomponenten. Da nichts fixiert ist, ist die Flexibilität natürlich auch am besten.

4 Berechnungsbeispiele

In diesem Abschnitt soll anhand von zwei Berechnungsbeispielen das zuvor erläuterte unternehmensspezifische Modell illustriert werden

4.1 Input & Modellparameter

Um die Wirkungsweise zu beschreiben, sollen zwei Unternehmen mit jeweils einem Exposure von **250,0 Tsd.** betrachtet werden, wobei VU 1 eine kleine Kopie des Gesamtmarktes und VU 2 ein regional stark in einigen sehr risikoexponierten Bezirken konzentriertes Unternehmen sein soll. Für diese beiden Beispielunternehmen wurden folgende Indizes ermittelt:

	VU 1	VU 2
VU Events in % der Gesamtevents	100,00%	20,00%
VU Eventhöhenindex	100,00%	500,00%
VU Basisschadenbedarfsindex	100,00%	100,00%

Alle Berechnungen sollen ausgehend von den Werten des Basisjahres mit einer Inflationsanpassung von **119,4%** auf das aktuelle Jahr erfolgen.

Für beide Unternehmen ist der Großschadenbedarfsindex 100%, wobei sich im ersten Fall dieser Wert aus vielen Events mit durchschnittlicher Belastung (bezogen auf die insgesamt gleichförmig verteilten Exposureeinheiten) und im zweiten Fall aus wenigen Events mit extremer Belastung (bezogen auf die in sehr stark risikoexponierten Gebieten konzentrierten Exposureeinheiten) zusammensetzt.

Somit sollten für beide Unternehmen die Erwartungswerte, nicht aber die Standardabweichungen gleich sein, siehe dazu die nachfolgenden Berechnungen.

4.1.1 Unternehmen 1

Für das erste Unternehmen ergeben sich alle Verteilungsparameter proportional zu den Marktverhältnissen, insbesondere gilt für die VU Events:

$$E[N^*] = 5{,}52 \cdot 100\% = 5{,}52$$

$$STD[N^*] = (5{,}52 \cdot 100\% \cdot (1 - 100\%) + 100\%^2 \cdot 2{,}38^2)^{1/2} = 2{,}38$$

Für die Eventschadenhöhen in T€ bei einem Exposure von 250,0 Tsd. ergeben sich die nachfolgenden Parameter in der aktuellen Wertigkeit:

$$E[X^*] = 2{,}65 \cdot 119{,}4\% \cdot 100\% \cdot 250{,}0 = 792{,}3$$

$$STD[X^*] = 6{,}11 \cdot 119{,}4\% \cdot 100\% \cdot 250{,}0 = 1.825{,}3$$

Gemäß der Formeln für das kollektive Modell ergeben sich die nachfolgenden Parameter für den Großschadenbedarf von Unternehmen 1 in T€:

$$E[S^*] = 5{,}52 \cdot 792{,}3 = 4.376{,}7$$

$$STD[S^*] = (5{,}52 \cdot 1.825{,}3^2 + 792{,}3^2 \cdot 2{,}38^2)^{1/2} = 4.686{,}9$$

Beim Basisschadenbedarf unterscheiden sich die beiden Unternehmen nicht. Für den Variationskoeffizienten des Großschadenbedarfs ergibt sich ganz allgemein aus den Formeln für das kollektive Modell

$$CV[S^*]^2 = CV[X^*]^2 / E[N^*] + CV[N^*]^2.$$

Aufgrund des proportionalen Ansatzes stimmt der Variationskoeffizient von X* immer mit dem Variationskoeffizienten des Marktes überein. Der Variationskoeffizient des Großschadenbedarfs wird also nur von den Modelleigenschaften von N* beeinflusst; die Unternehmensgröße spielt keine Rolle.

Bei Einbeziehung des zuvor erläuterten Volatilitätsfaktors für die VU spezifische Exposurekonzentration würde sich ggf. auch für dieses Unternehmen ein veränderter Variationskoeffizient ergeben.

4.1.2 Unternehmen 2

Für das zweite Unternehmen ist insbesondere das Eventanzahlmodell nicht proportional, wobei sich hier folgende Parameter ergeben:

$$E[N^*] = 5{,}52 \cdot 20\% = 1{,}10$$

$$STD[N^*] = (5{,}52 \cdot 20\% \cdot (1 - 20\%) + 20\%^2 \cdot 2{,}38^2)^{1/2} = 1{,}05$$

Der Variationskoeffizient für die Eventanzahl ist deutlich höher als beim ersten Unternehmen. Für die Eventhöhen gelten folgende Parameter:

$$E[X^*] = 2{,}65 \cdot 119{,}4\% \cdot 500\% \cdot 250{,}0 = 3.961{,}7$$

$$STD[X^*] = 6{,}11 \cdot 119{,}4\% \cdot 500\% \cdot 250{,}0 = 9.126{,}4$$

Aus den Formeln für das kollektive Modell ergeben sich folgende Parameter für den Großschadenbedarf:

$$E[S^*] = 1{,}10 \cdot 3.961{,}7 = 4.376{,}7$$

$$STD[S^*] = (1{,}10 \cdot 9.126{,}4^2 + 3.961{,}7^2 \cdot 1{,}05^2)^{1/2} = 10.462{,}0$$

Zum Vergleich sind in der nachfolgenden Tabelle noch einmal die gerechneten Parameter für beide Unternehmen gegenüber gestellt.

	EW	STD	VK
Anzahl der Events			
VU 1	5,52	2,38	43,1%
VU 2	1,10	1,05	95,4%

	EW	STD	VK
Eventschadenhöhe			
VU 1	792,3	1.825,3	230,4%
VU 2	3.961,7	9.126,4	230,4%
Großschadenbedarf			
VU 1	4.376,7	4.686,9	107,1%
VU 2	4.376,7	10.462,0	239,0%

Beim zweiten Unternehmen beobachtet man weniger Ereignisse, die das Unternehmen (bezogen auf die gesamten Exposureeinheiten) aber stärker treffen. Die Volatitiltät des Großschadenbedarfs ist deutlich höher als beim ersten Unternehmen. Dies hat insbesondere Auswirkungen bei Rückversicherungslösungen, da beim zweiten Unternehmen – trotz insgesamt gleichen Erwartungswerten wie beim ersten Unternehmen – Rückversicherungslayer eher getroffen werden als im ersten Fall. Derartige Auswirkungen kann man aber nur mit Simulationsansätzen einschätzen.

4.2 Gesamtrechnung inkl. RV Optimierung

Beide Unternehmen haben einen erwarteten Großschadenbedarf von **4.376,7 T€**, aber ein unterschiedliches Frequency / Severity Profil. Da das zweite Unternehmen im Schnitt nur etwas mehr als ein Event pro Jahr mit einer mittleren Schadenhöhe von etwas unter 4 Mio. € beobachtet, wird ein Kumulschadenexzedent **25 Mio. xs 5 Mio.** in diesem Fall durchaus häufiger getroffen.

Dies soll im Folgenden am Beispiel einer einzelnen Simulation der Brutto und der Nettoaufwände illustriert werden:

4.2.1 Unternehmen 1

Zunächst einmal muss der Brutto Großschadenaufwand simuliert werden, insbesondere die Anzahl der Events und die jeweilige Eventschadenhöhen.

Eventanzahl			
Gezogene Zufallszahl			95,00%
EW VU			5,52
STD VU			2,38
N	P(X≤N)	P(X=N)	Gesamt Events
0	0,4%	0,4%	
1	2,6%	2,2%	1
2	8,7%	6,1%	1
3	20,0%	11,2%	1
4	35,5%	15,5%	1
5	52,6%	17,1%	1
6	68,4%	15,8%	1
7	80,9%	12,5%	1
8	89,5%	8,6%	1
9	94,7%	5,3%	1
10	97,7%	2,9%	1

Abbildung 9: Simulierte Anzahl der Events für VU 1.

Für die Eventanzahl wurde die (relativ hohe) Zufallszahl 95,00% gezogen, so dass in einem solchen Jahr 10 Events anfallen. Das erste Unternehmen wird von allen diesen Unternehmen genauso getroffen wie auch der gesamte Markt.

Für diese Events müssen nun (bezogen auf den Eventhöhenindex des Unternehmens) die jeweiligen Eventhöhen gezogen werden.

Eventhöhe	
Inflation.	119,4%
EW Gesamt	4.376,75
STD Gesamt	4.686,91
Gezogene Zufallszahl	Schadenhöhe Brutto
91,2%	1.568,1
53,6%	461,4
62,6%	654,5
82,4%	1.084,4
85,4%	1.167,8
93,2%	1.695,8
55,8%	507,0
66,4%	736,5
76,9%	965,7
77,9%	986,8

Abbildung 10: Simulierte Eventschadenhöhen für VU 1.

Obwohl außergewöhnliche viele Events in dieser Simulation aufgetreten sind, wurde in keinem einzigen Fall eine Eventschadenhöhe gezogen, die in den Rückversicherungslayer fällt. Der Kumulschadenexzent 25 Mio. xs 5 Mio. wirkt also für diese Unternehmen so gut wie nie.

4.2.2 Unternehmen 2

Das zweite Unternehmen wird keineswegs von jedem dieser 10 Events betroffen, sondern nur im Schnitt von 20% davon. Wenn das Unternehmen aber betroffen ist, dann durchschnittlich fünfmal höher als das erste Unternehmen. Somit wird der Layer durchaus auch getroffen.

Eventanzahl			
Gezogene Zufallszahl			95,00%
EW			1,10
STD			1,05
N	Gesamt Events	VU Events Zuf. Zahl	Treffer
0			
1	1	98,4%	1
2	1	61,0%	
3	1	37,9%	
4	1	60,0%	
5	1	64,8%	
6	1	59,3%	
7	1	17,4%	
8	1	99,9%	1
9	1	76,5%	
10	1	42,5%	

Abbildung 11: Simulierte Anzahl der Events für VU 2.

Nur zwei der insgesamt zehn Events betreffen das zweite Unternehmen, das erste und das achte. Die Eventschadenhöhen sind in diesem Fall aber fünfmal so hoch.

Eventhöhe	
Inflation.	119,4%
EW Gesamt	4.376,75
STD Gesamt	10.461,97
Gezogene Zufallszahl	**Schadenhöhe Brutto**
91,2%	7.840,4
76,9%	4.828,7

Abbildung 12: Simulierte Eventschadenhöhen für VU 2.

Obwohl das zweite Unternehmen viel seltener getroffen wird, ist die Intensität deutlich höher, so dass zumindest ein Event mit insgesamt **2,84 Mio. €** in den Layer fällt. Dies ist zwar nur eine einzelne Simulation, aber sie zeigt schon ganz deutlich die beobachtbaren Effekte.

Um die Auswirkung einer Rückversicherungsstruktur insgesamt zu überprüfen, muss natürlich ein Simulationslauf mit ausreichend vielen Simulationen durchgeführt werden, damit die empirische Verteilung nahe an die wahre Verteilung approximiert wird.

Durch einen Vergleich der Bruttoschadenverteilungen mit den Nettoschadenverteilungen kann man dann verproben, ob eine Rückversicherungsstruktur effizient ist oder nicht.

5 Fazit

Zusammenfassend kann man aus den vorherigen Überlegungen folgende Aspekte besonders betonen:

- Öffentlich verfügbare Informationen wie etwa in [1] können derart modifiziert werden, dass eine klassische Rückversicherungsoptimierung bzw. eine approximative Rückversicherungsquotierung möglich sind.
- Um dies zu ermöglichen, muss auf Basis der vorhandenen Informationen zu rückversicherungsrelevanten Ereignissen ein Frequency / Severity Modell konstruiert werden.
- Wenn für kleinere Ereignisse derart detaillierte Informationen nicht vorliegen, kann man hier nur Gesamtschadenverteilungen (beispielsweise als Lognormal Verteilung) modellieren.
- Für eine Rückversicherungsoptimierung bedeutet dies konkret, dass man in diesen Fällen von der Hypothese ausgeht, dass derartig kleine Ereignisse nicht von den normalen Kumulschadenexzedenten getroffen werden.
- Die Parametrisierung eines solchen Modells kann mittels eines anderen – ggf. gröberen Modells – justiert werden.
- Durch Justierung kann man i. d. R. Erwartungswerte exakt treffen; bei Standardabweichungen wird man ggf. einige „Abstriche" vornehmen müssen.
- Bei der hier beschriebenen Modellierung müssen für ein VU individuelles Modell Regionalindizes für Eventhäufigkeiten, Eventschadenhöhen und (Basis) Schadenbedarfe definiert werden.
- Schadenbedarfsindizes können relativ einfach definiert werden, sofern Aufwände nach Regionalbezirken getrennt vorliegen, z. B.
  - für die rückversicherungsrelevanten Ereignisse oder
  - für die Basisschadenereignisse.
- Bei der Ermittlung von Indizes kann (und sollte) auf Mehrjahreswerte zurückgegriffen werden.
- Die Definition der Schadenbedarfsindizes erfolgte im vorliegenden Modell aufgrund der beobachteten Verteilungen (und den darin implizit abgebildeten Korrelationen) und nicht mit einer modellhaften Korrelationsannahme.
- Das VU individuelle Eventanzahlmodell wurde konstruiert, indem das Marktmodell für die Eventanzahl (in konkreten Fall annähernd Poisson verteilt) mit einer Ziehung von entsprechend vielen Binomialverteilungen kombiniert wurde.

- Das VU individuelle Modell hat dadurch u. U. eine höhere Volatilität (gemessen durch den Variationskoeffizienten) als das Marktmodell.
- Durch einen Modellanasatz, der die Exposurekonzentration berücksichtigt, kann zusätzlich noch ein Volatilitätseffekt für die Eventschadenhöhen berücksichtigt werden.
- In diesem Modell spielt die Unternehmensgröße keine Rolle, sondern nur die regionale Aufteilung des Portfolios.
- Der hier vorgestellte Modellansatz kann als Simulationsmodell oder als Event Loss Table Ansatz auf Basis eines festen Simulationslaufes technisch umgesetzt werden.
- Ein reiner Simulationsansatz ist natürlich sehr flexibel, hat aber (zumindest bei einer Umsetzung in EXCEL) u. U. ein sehr schlechtes Laufzeitverhalten und produziert keine gleichen Ergebnisse bei gleichen Inputs, sondern nur ähnliche.
- Der Event Loss Table Ansatz produziert im Sinne eines festen Algorithmus‘ gleiche Ergebnisse bei gleichen Inputs und weist auch ein besseres Laufzeitverhalten auf. Allerdings bedeutet dies zusätzlichen Programmieraufwand und man büßt an Flexibilität ein. Die Dateigröße kann je nach Design ziemlich groß werden.
- In diesem Zusammenhang muss darauf hingewiesen werden, dass ein solcher Ansatz einen Ansatz mit professionellen Event Loss Tabellen nicht ersetzen kann.

Literaturverzeichnis

[1] **GDV**: Rundschreiben K-Statistik 93/2012: Regionalmodell für Kumulschäden durch Elementarereignisse in der Fahrzeugversicherung, Berlin, 2012. .

[2] **GDV**: Rundschreiben K-Statistik 82/2012: Kraftfahrtversicherung - Aktualisierung des Katalogs der Elementarschäden und Kumulereignisse, Berlin, 2012.

[3] **Mack**, Thomas: Schadenversicherungsmathematik, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Nr. 28, S. 77 ff., 2012.

[4] **Albrecht**, Peter: Ausgleich im Kollektiv und Prämienprinzipien, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaften (ZVersWiss), Nr. 71, S. 167-180, 1984.

[5] **Hirschman**, Albert Otto: The Paternity of an Index, in: The American Economic Review, Nr. 5, S. 761 ff., 1964.

Abbildungsverzeichnis

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am IVW Köln“. Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder hier abgerufen werden.

Forschung am IVW Köln, 3/2014
Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung
Köln, Mai 2014

ISSN (online) 2192-8479

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Lutz Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Maria Heep-Altiner
Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3449
Fax +49 221 8275-3277

Mail maria.heep-altiner@fh-koeln.de