Institut für Versicherungswesen

Forschung am IVW Köln, 9/2014

Institut für Versicherungswesen

Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert

Ralf Knobloch

Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Forschung am IVW Köln, 9/2014

Ralf Knobloch
Forschungsstelle FaRis

Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert

Zusammenfassung

Eine wichtige Fragestellung in den Wirtschaftswissenschaften ist die Bewertung von Zahlungsströmen mit dem Barwert. Dabei liegt jeder Barwertberechnung ein geeignetes Zinsmodell zugrunde. Bei einem speziellen Zinsmodell – der relativ gemischten Verzinsung – lassen sich einfache nichttriviale Beispiele/Zahlungsströme konstruieren, bei denen der Barwert bei jedem Zinssatz null ist. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, ob es bei anderen Zinsmodellen ebenfalls solche Zahlungsströme gibt. Im Hauptsatz kann die Beantwortung dieser Frage mit Mitteln der Analysis auf die Existenz von Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden.

Abstract

An important question in economics and business is to evaluate cash flows by the present value. Each calculation of a present value is based on a suitable interest model. In case of one special interest model, one can construct a simple nontrivial example/cash flow, where the present value is zero for each interest rate. In this paper we will pursue the question, whether there are such examples/cash flows for other interest models. In the main theorem the answer to this question can be ascribed to the existence of a solution of homogeneous linear simultaneous equations with calculus methods.

Schlagwörter:

Barwert, Bewertung von Zahlungsströmen, Finanzmathematik, Zinsmodelle

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In vielen Teilgebieten der Wirtschaftswissenschaften ist die Bewertung von Zahlungsströmen eine der zentralen Fragestellungen. Dies gilt sowohl für theoretische Überlegungen als auch für praktische Anwendungen. Einer der wichtigsten Bewertungsansätze ist dabei der Barwert eines Zahlungsstroms, d.h. die Summe der auf einen Bewertungsstichtag abgezinsten Zahlungen. Jede Barwertberechnung benötigt dazu ein passendes Zinsmodell. Sind die Zeiträume zwischen dem Bewertungsstichtag und den jeweiligen Zahlungszeitpunkten alle ganzzahlig (d.h. es sind volle Jahre), so wird üblicherweise die jährliche Verzinsung mit Zinseszins verwendet. Man spricht in diesem Fall von einer jährlichen Zahlweise.

Mehr Vielfalt bei den Zinsmodellen gibt es, sobald der Zahlungsstrom unterjährliche Zahlungen enthält. Zunächst muss entschieden werden, ob auch ein unterjährlicher Zinseszinseffekt berücksichtigt werden soll oder nicht. Die Modelle mit einem unterjährlichen Zinseszinseffekt werden unter dem Begriff „unterjährliche Verzinsung", die Modelle ohne einen unterjährlichen Zinseszinseffekt unter dem Begriff „gemischte Verzinsung" zusammengefasst (vgl. [1] S.20ff und S.27ff, [6] S.75ff und S.85ff).

Sowohl bei der unterjährlichen Verzinsung als auch bei der gemischten Verzinsung kann man den Jahreszins proportional zu der Verzinsungszeitspanne ansetzen. Man spricht dann von der „unterjährlichen Verzinsung zum relativen Zins" bzw. von der „relativ gemischten Verzinsung". Andere Zinsmodelle basieren auf der Idee des konformen Zinssatzes. Bei diesem Ansatz führt eine unterjährliche Verzinsung – im Unterschied zu den Modellen mit relativem Zins – bei einer ganzzahligen Laufzeit zum selben Guthaben wie die übliche jährliche Verzinsung mit Zinseszins (vgl. [1] S. 24ff und [6] S.78ff).

Die relativ gemischte Verzinsung wird in der Praxis oft implizit angewendet. Als Beispiele der Anwendung seien die Effektivzinsberechnung bei gebrochener Laufzeit (vgl. [3] S.72) und das Restglied in der Pensionsversicherungsmathematik (vgl. [5]) genannt. Wir betrachten das folgende Beispiel zur relativ gemischten Verzinsung.

Beispiel 1:

Gegeben sei ein Zahlungsstrom mit den drei folgenden Zahlungen:

- Zahlung zum Zeitpunkt $\mathbf{t = 0{,}5}$ in Höhe von $\mathbf{C_{0,5} = -1}$
- Zahlung zum Zeitpunkt $\mathbf{t = 1}$ in Höhe von $\mathbf{C_1 = 2}$
- Zahlung zum Zeitpunkt $\mathbf{t = 1{,}5}$ in Höhe von $\mathbf{C_{1,5} = -1}$

Verwendet man als Zinsmodell die relativ gemischte Verzinsung mit Zinssatz $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$, so berechnet sich der Barwert des Zahlungsstroms $\mathbf{B_0}$ wie folgt:

$$\mathbf{B_0} = \frac{-1}{1+0{,}5\cdot i} + \frac{2}{1+i} + \frac{-1}{(1+0{,}5\cdot i)\cdot(1+i)} = \frac{-(1+i)+2\cdot(1+0{,}5\cdot i)-1}{(1+0{,}5\cdot i)\cdot(1+i)} = 0\,.$$

Somit ergibt bei diesem Zahlungsstrom für den Barwert bei jedem Zins der gleiche Wert, d.h. der Barwert ist zinsunabhängig.

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, bei welchen Zinsmodellen es nichttriviale endliche Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert geben kann.

2. Das Modell (Teil 1)

Gegeben sei ein endlicher Zahlungsstrom $\mathbf{C_t}, \mathbf{t} \in \mathbf{M}$. Dabei genügen die Zahlen $\mathbf{C_t}$ und die Menge der Zahlungszeitpunkte $\mathbf{M}$ den folgenden Bedingungen:

- $\mathbf{C_t} \in \mathbf{IR}$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{M}$.
- $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{IR}_0^+$ (Alle Zahlungen erfolgen zum Zeitpunkt $\mathbf{0}$ oder später)
- $|\mathbf{M}| < \infty$ (Es sind nur endlich viele Zahlungszeitpunkte)

Zu jedem Zahlungszeitpunkt $\mathbf{t} \in \mathbf{M}$ gibt es einen Abzinsungsfaktor $\mathbf{v_t}$. Für die Abzinsungsfaktoren gilt:

- $\mathbf{v_t} \leq \mathbf{1}\ ,\ \ \mathbf{t} \in \mathbf{M}$
- $\mathbf{0} \in \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{v_0} = \mathbf{1}$
- $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{M},\ \mathbf{s} < \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{v_s} > \mathbf{v_t}$

Aus diesen Notationen ergibt sich der Barwert der Zahlungsreihe wie folgt:

$$\mathbf{B_0} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{M}} \mathbf{v_t} \cdot \mathbf{C_t}\ .$$

Zu bemerken ist noch, dass sich die Abzinsungsfaktoren i.d.R. aus einem vorgegeben Jahreszinssatz $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$ berechnen.

3. Jährliche Verzinsung mit Zinseszins

Zunächst betrachten wir die üblicherweise verwendete jährliche Verzinsung mit Zinseszins. Dazu sei die Menge der Zeitpunkte eine Teilmenge der natürlichen Zahlen inklusive der $\mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{M} \subset \mathbf{IN_0}$. Der Zinssatz sei $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$ und es gilt $\mathbf{v_t} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{t}}}$. Mit der Definition des Abzinsungsfaktors $\mathbf{v} := \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{i}}$ ergibt sich $\mathbf{v_t} = \mathbf{v^t}$. Damit erhält man als Barwert

$$\mathbf{B_0} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{M}} \mathbf{v_t} \cdot \mathbf{C_t} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{M}} \mathbf{v^t} \cdot \mathbf{C_t} .$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass sich bei unterschiedlichen Zinssätzen der gleiche Barwert ergeben kann.

Beispiel 2:

Es sei $\mathbf{M} = \{\mathbf{0,1,2}\}$, d.h. der Zahlungsstrom besteht aus den drei Zahlungen $\mathbf{C_0}, \mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}$. Als Barwert ergibt sich

$$\mathbf{B_0} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{M}} \mathbf{v^t} \cdot \mathbf{C_t} = \mathbf{v^2} \cdot \mathbf{C_2} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C_1} + \mathbf{C_0} .$$

Zu einem vorgegeben Wert $\mathbf{b} \in \mathbf{IR}$, mit $\mathbf{C_0} \neq \mathbf{b}$ gibt es unter der Bedingung

(B1) $\left(\frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{C_0} - \mathbf{b})}\right)^{\mathbf{2}} > \frac{\mathbf{C_2}}{\mathbf{C_0} - \mathbf{b}}$

zwei Zinssätze, die jeweils zum Barwert $\mathbf{B_0} = \mathbf{b}$ führen. Es sind dies

$$\mathbf{i_1} = -\mathbf{1} - \frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{C_0} - \mathbf{b})} + \sqrt{\left(\frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{C_0} - \mathbf{b})}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{C_2}}{\mathbf{C_0} - \mathbf{b}}}$$

und

$$\mathbf{i_2} = -\mathbf{1} - \frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{C_0} - \mathbf{b})} - \sqrt{\left(\frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{C_0} - \mathbf{b})}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{C_2}}{\mathbf{C_0} - \mathbf{b}}} \quad .$$

Zur Berechnung dieser beiden Zinssätze wird die Gleichung

$$\mathbf{v^2} \cdot \mathbf{C_2} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C_1} + \mathbf{C_0} = \mathbf{b}$$

zunächst umgeformt in

$$\frac{C_2}{C_0 - b} + (1+i) \cdot \frac{C_1}{C_0 - b} + (1+i)^2 = 0.$$

Anschließend löst man diese quadratische Gleichung mit der Variablen $(1+i)$ mithilfe der p-q-Formel. Durch Auflösen nach dem Zins ergeben sich die beiden Lösungen i_1 und i_2.

Zusätzlich zu (B1) betrachten wir die Bedingungen (B2), (B3) und (B4) wie folgt:

(B2) $C_0 < b$

(B3) $-2 \cdot (C_0 - b) < C_1$

(B4) $C_2 + C_1 + C_0 - b \le 0$

Gelten alle vier Bedingungen (B1), (B2), (B3) und (B4), so ergibt sich die Nichtnegativität von i_2 wie folgt:

$$C_2 + C_1 + C_0 - b \le 0 \Leftrightarrow C_0 - b \le -(C_1 + C_2)$$

$$\overset{(B2)}{\Leftrightarrow} 1 \ge -\frac{C_1 + C_2}{C_0 - b} \Leftrightarrow 1 + \frac{C_1}{C_0 - b} \ge -\frac{C_2}{C_0 - b}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{C_1}{C_0 - b} + \left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 \ge \left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 - \frac{C_2}{C_0 - b}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 \ge \left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 - \frac{C_2}{C_0 - b}$$

$$\Leftrightarrow \left(-1 - \frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 \ge \left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 - \frac{C_2}{C_0 - b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-2(C_0 - b) - C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 \ge \left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 - \frac{C_2}{C_0 - b}$$

$$\overset{(B1),(B2),(B3)}{\Rightarrow} \frac{-2(C_0 - b) - C_1}{2 \cdot (C_0 - b)} \ge \sqrt{\left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 - \frac{C_2}{C_0 - b}}$$

$$\Leftrightarrow -1 - \frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)} - \sqrt{\left(\frac{C_1}{2 \cdot (C_0 - b)}\right)^2 - \frac{C_2}{C_0 - b}} \ge 0 \Leftrightarrow i_2 \ge 0$$

Wegen $i_1 \ge i_2$ folgt $i_1 \ge 0$. Somit gibt es in diesem Beispiel unter den Bedingungen (B1), (B2), (B3) und (B4) zwei ökonomisch sinnvolle Zinssätze (d.h. Zinssätze größer oder gleich null), die den gleichen Barwert ergeben.

Als Zahlenbeispiel sei hier genannt:

$$C_0 = -400.000 \ , \ C_1 = 1.400.000 \ , \ C_2 = -815.000$$
$$b = 200.000 \ , \ i_1 = 0{,}21937129 \ , \ i_2 = 0{,}11396204$$

Im Spezialfall $b = 0$ bedeutet die Existenz der beiden Lösungen i_1 und i_2, dass es in diesem Fall keinen eindeutigen Effektivzins gibt (vgl. [6] S.235).

Bei der jährlichen Verzinsung gibt es, wie in Beispiel 2 gezeigt, nichttriviale Zahlungsreihen, die bei unterschiedlichen Zinssätzen zum gleichen Barwert führen. Verlangt man aber, dass man bei jedem Zinssatz $i \geq 0$ den gleichen Barwert b erhält, so erfüllt dies nur die triviale Zahlungsreihe $C_t = 0$ für alle $t \in M \setminus \{0\}$ und $C_0 = b$. Beweisen kann man dies mit elementaren Ergebnissen der Analysis.

Satz 1:

Es sei $M \subset IN_0$ und $v_t = \dfrac{1}{(1+i)^t} = v^t$. Dann gilt:

$$B_0 = \sum_{t \in M} v_t \cdot C_t = 0 \text{ für alle } i \geq 0 \;\Rightarrow\; C_t = 0 \text{ für alle } t \in M$$

Beweis:

O.B.d.A. sei $M = \{0,1,2,...m\}$. Man erhält als Funktion des Abzinsungsfaktors $v = \dfrac{1}{1+i} \in (0,1]$

$$f(v) := \sum_{t \in M} v_t \cdot C_t = \sum_{t \in M} v^t \cdot C_t \ .$$

Diese Funktion f nimmt für jedes v aus dem Definitionsbereichs den Wert 0 an. Da es sich dabei um ein Polynom m-ten Grades handelt, folgt die Behauptung mithilfe des Identitätssatzes für Polynome (vgl. [4] S.123).

□

Folgerung 1:

Es sei $M \subset IN_0$ mit $0 \in M$ und $v_t = \dfrac{1}{(1+i)^t} = v^t$. Es sei $b \in IR$. Dann gilt:

$$B_0 = \sum_{t \in M} v_t \cdot C_t = b \text{ für alle } i \geq 0 \;\Rightarrow\; C_0 = b \text{ und } C_t = 0 \text{ für alle } t \in M \setminus \{0\}$$

Beweis:

Definiere eine neue Zahlungsreihe $\mathbf{D_t}, \mathbf{t} \in \mathbf{M}$ durch $\mathbf{D_0} := \mathbf{C_0} - \mathbf{b}$ und $\mathbf{D_t} := \mathbf{C_t}$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dann gilt:

$$\mathbf{B_0} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{M}} \mathbf{v_t} \cdot \mathbf{D_t} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{M}} \mathbf{v_t} \cdot \mathbf{C_t} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

für alle $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$. Daraus folgt $\mathbf{D_t} = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{C_0} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{C_t} = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

□

Somit gibt es im Fall der jährlichen Verzinsung mit Zinseszins keine nichttrivialen endlichen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

Bemerkung:

Wegen des Identitätssatz für Potenzreihen (vgl. [4] S.372f) gelten die Aussagen Satz 1 und Folgerung 1 auch, wenn man statt vom einem endlichen Zahlungsstrom von einen Zahlungsstrom $\mathbf{C_t}, \mathbf{t} \in \mathbf{M}$ mit $\mathbf{M} = \mathbb{N}_0$ ausgeht.

4. Das Modell (Teil 2)

Bisher wurde für die Zahlungszeitpunkte eine beliebige endliche Menge, mit Zahlen größer oder gleich null verwendet. In der Praxis aber findet man i. d. R. äquidistante Zahlungszeitpunkte vor. Deshalb ist es sinnvoll $\mathbf{n}$ Jahre mit jeweils $\mathbf{m}$ unterjährlichen nachschüssigen Zahlungen anzusetzen und die Menge $\mathbf{M}$ mit Blick auf die Anwendungen wie folgt zu definieren:

$$\mathbf{M} = \left\{ (\mathbf{k}-1) + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{m}} \middle| \mathbf{k} = 1,\dots,\mathbf{n}, \mathbf{j} = 1,\dots,\mathbf{m} \right\}.$$

Der Einfachheit halber werden für die Zahlungszeitpunkte und die Zahlungen die folgenden Notationen eingeführt:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{k},\mathbf{j}} := (\mathbf{k}-1) + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{m}}, \mathbf{k} = 1,\dots,\mathbf{n}, \mathbf{j} = 1,\dots,\mathbf{m}$$
$$\mathbf{C}_{\mathbf{k},\mathbf{j}} := \mathbf{C}_{\mathbf{t}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}}, \mathbf{k} = 1,\dots,\mathbf{n}, \mathbf{j} = 1,\dots,\mathbf{m}$$

Die Abzinsungsfaktoren ergeben sich als Funktion

$$\mathbf{f} : \{1,\dots,\mathbf{n}\} \times \{1,\dots,\mathbf{m}\} \times [0,\infty) \to (0,1].$$

Dabei repräsentiert der Funktionswert $\mathbf{f}(\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i})$ den Abzinsungsfaktor für den $\mathbf{j}$-ten Zahlungszeitpunkt im $\mathbf{k}$-ten Jahr bei einem Zinssatz $\mathbf{i}$.

Damit erhält man Barwert in Abhängigkeit vom Zinssatz $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{i}) = \sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{M}} \mathbf{v}_\mathbf{t} \cdot \mathbf{C}_\mathbf{t} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{f}(\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i}) \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}.$$

Für die wichtigsten Zinsmodelle ergeben sich die folgenden Darstellungen:

Beispiel 3:

a) Einfache jährliche Verzinsung

Wegen der jährlichen Verzinsung gilt $\mathbf{m} = 1$. Man erhält für $\mathbf{k} \in \{1,\dots,\mathbf{n}\}$ und $\mathbf{i} \geq 0$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{k},1,\mathbf{i}) = \frac{1}{1+\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}}$$

b) Jährliche Verzinsung mit Zinseszins

Wegen der jährlichen Verzinsung gilt hier ebenfalls $\mathbf{m} = 1$. Man erhält für $\mathbf{k} \in \{1,\dots,\mathbf{n}\}$ und $\mathbf{i} \geq 0$:

$$\mathbf{f(k,1,i)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1+i})^{\mathbf{k}}}$$

c) Unterjährliche Verzinsung mit relativem Zins

Man erhält für $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1,\ldots,n}\}$, $\mathbf{j} \in \{\mathbf{1,\ldots,m}\}$ und $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{f(k,j,i)} = \frac{\mathbf{1}}{\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{m}}\right)^{(\mathbf{k}-\mathbf{1})\cdot\mathbf{m}+\mathbf{j}}}$$

d) Konforme Verzinsung

Man erhält für $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1,\ldots,n}\}$, $\mathbf{j} \in \{\mathbf{1,\ldots,m}\}$ und $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{f(k,j,i)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1+i})^{\mathbf{k}-\mathbf{1}+\mathbf{j}/\mathbf{m}}}$$

e) Relativ gemischte Verzinsung

Man erhält für $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1,\ldots,n}\}$, $\mathbf{j} \in \{\mathbf{1,\ldots,m}\}$ und $\mathbf{i} \geq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{f(k,j,i)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1+i})^{\mathbf{k}-\mathbf{1}} \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{i}\right)}$$

5. Reihenentwicklung der Abzinsungsfaktoren

Zur Formulierung des Hauptsatzes dieser Arbeit benötigt man eine Reihenentwicklung der Abzinsungsfaktoren $\mathbf{f(k,j,i)}$. Dabei ist die Idee diese Funktion so als Reihe zu entwickeln, dass die Variablen $\mathbf{k}$ und $\mathbf{j}$ formal von der Variablen $\mathbf{i}$ getrennt werden. Dies funktioniert allerdings – wie im folgenden Beispiel ausgeführt – nicht direkt, sondern nur für eine Transformation der Variablen $\mathbf{i}$. Diese Transformation ist gegeben als Funktion $\mathbf{h : [0,\infty) \to (0,1]}$.

Beispiel 4:

a) Einfache jährliche Verzinsung

Variablentransformation: $\mathbf{h(i) = \frac{1}{1+i}}$

Wegen der jährlichen Verzinsung gilt $\mathbf{m = 1}$. Man erhält für $\mathbf{k \in \{1,\ldots,n\}}$ und $\mathbf{i \ge 0}$:

$$\mathbf{f(k,1,i) = \frac{1}{1+k\cdot i} = \frac{1}{(1-k)+k(1+i)} = \frac{1/_{1+i}}{\frac{1-k}{1+i}+k} = \frac{h(i)}{(1-k)\cdot h(i)+k} =}$$

$$\mathbf{= \frac{h(i)}{k}\cdot\frac{1}{1-h(i)\cdot\frac{k-1}{k}}}$$

Wg. $\mathbf{\left|h(i)\cdot\frac{k-1}{k}\right| = |h(i)|\cdot\left|\frac{k-1}{k}\right| < 1}$ ergibt sich:

$$\mathbf{f(k,1,i) = \frac{h(i)}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{l}\cdot(h(i))^{l} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k-1)^{l}}{k^{l+1}}(h(i))^{l+1} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(k-1)^{l-1}}{k^{l}}(h(i))^{l}}$$

b) Jährliche Verzinsung mit Zinseszins

Variablentransformation: $\mathbf{h(i) = \frac{1}{1+i}}$

Wegen der jährlichen Verzinsung gilt hier ebenfalls $\mathbf{m = 1}$. Man erhält für $\mathbf{k \in \{1,\ldots,n\}}$ und $\mathbf{i \ge 0}$:

$$\mathbf{f(k,1,i) = \frac{1}{(1+i)^{k}} = (h(i))^{k}}$$

c) Unterjährliche Verzinsung mit relativem Zins

Variablentransformation: $\mathbf{h(i)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{i}{m}}$

Man erhält für $k \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $i \geq 0$:

$$f(k,j,i) = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{(k-1)\cdot m+j}} = (h(i))^{(k-1)\cdot m+j}$$

d) Konforme Verzinsung

Variablentransformation: $\mathbf{h(i)} = \sqrt[m]{\dfrac{1}{1+i}}$

Man erhält für $k \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $i \geq 0$:

$$f(k,j,i) = \frac{1}{(1+i)^{(k-1)+j/m}} = \frac{1}{\left(\sqrt[m]{1+i}\right)^{(k-1)\cdot m+j}} = (h(i))^{(k-1)\cdot m+j}$$

e) Relativ gemischte Verzinsung

Variablentransformation: $\mathbf{h(i)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{i}{m}}$

Man erhält für $k \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $i \geq 0$:

$$f(k,j,i) = \frac{1}{(1+i)^{k-1}\cdot\left(1+\frac{j}{m}\cdot i\right)} = \left(\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{i}{m}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\cdot i\right)} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}-1+1+\frac{i}{m}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{1-j+j+\frac{j}{m}\cdot i} = \left(\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1-m}{m}+\left(1+\frac{i}{m}\right)}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{(1-j)+j\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right)} =$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{m}\cdot h(i)}{\frac{1-m}{m}\cdot h(i)+1}\right)^{k-1}\cdot\frac{\frac{1}{j}\cdot h(i)}{\frac{1-j}{j}\cdot h(i)+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{j}\cdot(h(i))^k\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{m-1}{m}\cdot h(i)}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{j-1}{j}\cdot h(i)}$$

Wegen $\left|\frac{m-1}{m}\right|\cdot|h(i)|<1$ und $\left|\frac{j-1}{j}\right|\cdot|h(i)|<1$ für alle $j=1,\ldots,m$ ergibt sich mit der geometrischen Reihe:

$$f(k,j,i)=\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{j}\cdot(h(i))^k\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^l\cdot(h(i))^l\right)^{k-1}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{j-1}{j}\right)^l\cdot(h(i))^l$$

Da das Produkt zweier bzw. mehrere Potenzreihen ebenfalls eine Potenzreihe ist (vgl. [2] S.169f) ergibt sich wieder eine Potenzreihe mit $h(i)$ als Variable.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass bei den wichtigen Zinsmodellen der Finanzmathematik die Abzinsungsfaktoren $f(k,j,i)$ als Potenzreihe wie folgt dargestellt werden kann:

$$f(k,j,i)=\sum_{l=0}^{\infty}b_{k,j,l}\cdot(h(i))^l\ .$$

Dabei ist $h(i)$ eine Transformation des Zinssatzes.

6. Hauptsatz

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich die Frage nach der Existenz von Zahlungsströmen mit zinsunabhängigem Barwert (Wert $= \mathbf{0}$) auf die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems zurückführen lässt. Insbesondere gibt es genau dann nichttriviale Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert, wenn das homogene lineare Gleichungssystem neben dem Nullvektor weitere Lösungen besitzt. Ein Zahlungsstrom heißt dabei nichttrivial, wenn es mindestens eine Zahlung ungleich null ist.

Es wird vorausgesetzt, dass es eine Transformation $\mathbf{h(i)}$ des Zinssatzes gibt, so dass sich die Abzinsungsfaktoren wie folgt als Reihe entwickeln lassen:

$$\mathbf{f(k,j,i)} = \sum_{\mathbf{l=0}}^{\infty} \mathbf{b_{k,j,l}} \cdot (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{l}} \quad ,\mathbf{i} \in [\mathbf{0},\infty), \mathbf{k} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}, \mathbf{j} \in \{\mathbf{1},\ldots\mathbf{m}\}.$$

Es sei $\mathbf{A}$ die Menge aller Zahlungsströme $\mathbf{C_{k,j}}$, $\mathbf{k = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m}$ mit

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{f(k,j,i)} \cdot \mathbf{C_{k,j}} = \mathbf{0} \quad \text{für alle } \mathbf{i} \geq \mathbf{0}.$$

Damit enthält $\mathbf{A}$ Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

Es sei $\mathbf{B}$ die Menge aller Lösungen $\mathbf{C_{k,j}}$, $\mathbf{k = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m}$ des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_{k,j,l}} \cdot \mathbf{C_{k,j}} = \mathbf{0} \quad , \mathbf{l} = \mathbf{IN_0}.$$

.

Satz 2: (Hauptsatz)

Enthält der Wertebereich der Transformation $\mathbf{h}$ ein offenes Intervall $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subset (\mathbf{0},\mathbf{1}]$, so gilt $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Beweis:

Man kann den Barwert wie folgt umformen:

$$\mathbf{B_0(i)} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{f(k,j,i)} \cdot \mathbf{C_{k,j}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{l=0}}^{\infty} \mathbf{b_{k,j,l}} \cdot (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{C_{k,j}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{l=0}}^{\infty} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_{k,j,l}} \cdot (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{C_{k,j}} = \sum_{\mathbf{l=0}}^{\infty} (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{l}} \cdot \left(\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_{k,j,l}} \cdot \mathbf{C_{k,j}} \right)$$

Hat man eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{b}_{k,j,l}\cdot\mathbf{C}_{k,j}=\mathbf{0}\quad,\ \mathbf{l}=\mathbf{IN}_0\,,$$

so gilt

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{i})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{f}(\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i})\cdot\mathbf{C}_{k,j}=\mathbf{0}\ \text{ für alle }\ \mathbf{i}\geq\mathbf{0}\,.$$

Gilt umgekehrt

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{f}(\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i})\cdot\mathbf{C}_{k,j}=\mathbf{0}\ \text{ für alle }\ \mathbf{i}\geq\mathbf{0}\,,$$

so ist die Potenzreihe in der Variablen $\mathbf{h(i)}$ auf dem Intervall $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ identisch null. Somit müssen alle Koeffizienten gleich null sein (vgl. [2] S.372f) und man erhält eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems.

□

Folgerung 2:

$\mathbf{A}$ enthält genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $\mathbf{B}$ neben dem Nullvektor mindestens eine weitere Lösung besitzt.

Beweis: trivial

Folgerung 3:

$\mathbf{A}$ ist ein Vektorraum, insbesondere ist die Linearkombination zweier Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert wieder ein Zahlungsstrom mit zinsunabhängigem Barwert.

Beweis:

Die Aussage folgt direkt aus Satz 2, da die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ein Vektorraum ist.

□

Bemerkung:

Bisher findet bei dem vorgegebenen Zeitraster der Zeitpunkt $\mathbf{0}$ keine Berücksichtigung. Zu jedem Element aus $\mathbf{A}$ kann durch Hinzunahme des Zeitpunktes $\mathbf{0}$ mit der Zahlung $\mathbf{C}_0=\mathbf{b}\in\mathbf{IR}$ ein Zahlungsstrom konstruiert werden, bei dem bei jedem Zinssatz der Barwert den Wert $\mathbf{b}$ annimmt.

7. Anwendungen des Hauptsatzes (Teil 1)

In diesem Abschnitt gezeigt wie der Hauptsatz auf die jährliche Verzinsung mit Zinseszins, auf die unterjährliche Verzinsung mit relativem Zins, auf die konforme Verzinsung und die einfache Verzinsung angewendet werden kann, um zu zeigen, dass es bei diesen vier Zinsmodellen keine nichttrivialen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert gibt.

Beispiel 5: *(Jährliche Verzinsung mit Zinseszins)*

Variablentransformation: $\mathbf{h(i)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+i}}$

Ferner gilt $\mathbf{m=1}$ und für $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1,\ldots,n}\}$ und $\mathbf{i \geq 0}$:

$$\mathbf{f(k,1,i)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1+i})^{\mathbf{k}}} = (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{k}},$$

d.h.

$$\mathbf{b}_{\mathbf{k,1,l}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{l=k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{l \neq k} \end{cases}.$$

Dies liefert das Gleichungssystem

$$\mathbf{0} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b}_{\mathbf{k,j,l}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{k,j}} = \mathbf{C}_{\mathbf{l,1}},\ \mathbf{l = 1,\ldots,n}.$$

Dieses Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung $\mathbf{C}_{\mathbf{l,1}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{l = 1,\ldots,n}$. Somit gibt es keine nichttrivialen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

Beispiel 6: *(Unterjährliche Verzinsung mit relativem Zins)*

Variablentransformation: $\mathbf{h(i)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{i}}{\mathbf{m}}}$

Man erhält für $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1,\ldots,n}\}$, $\mathbf{j} \in \{\mathbf{1,\ldots,m}\}$ und $\mathbf{i \geq 0}$:

$$\mathbf{f(k,j,i)} = \frac{\mathbf{1}}{\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{i}}{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{(k-1)\cdot m+j}}} = (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{(k-1)\cdot m+j}},$$

d.h.

$$\mathbf{b}_{k,j,l} = \begin{cases} 1 & l = (k-1)\cdot m + j \\ 0 & l \neq (k-1)\cdot m + j \end{cases}.$$

Dies liefert das Gleichungssystem

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{k,j,l}\cdot C_{k,j} = C_{a\left(l/m\right),\, l-\left(a\left(l/m\right)-1\right)m},\; l = 1,\ldots,n\cdot m.$$

Dabei sei $\mathbf{a(x)}$ der aufgerundete Wert von $\mathbf{x}$. Da das Indexpaar $\left(a\left(l/m\right), l-\left(a\left(l/m\right)-1\right)\cdot m\right)$ für $l = 1,\ldots,n\cdot m$ die Indexpaare (k,j), $k = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$, komplett durchläuft, erhält man das Gleichungssystem

$$C_{k,j} = 0,\; k = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m.$$

Somit erhält man als einzige Lösung des Gleichungssystems den Nullvektor und es gibt keine nichttrivialen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

Beispiel 7: *(Konforme Verzinsung)*

Variablentransformation: $h(i) = \sqrt[m]{\frac{1}{1+i}}$

Man erhält für $k \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $i \geq 0$:

$$f(k,j,i) = \frac{1}{(1+i)^{(k-1)+j/m}} = \frac{1}{\left(\sqrt[m]{1+i}\right)^{(k-1)\cdot m+j}} = (h(i))^{(k-1)\cdot m+j}.$$

d.h.

$$\mathbf{b}_{k,j,l} = \begin{cases} 1 & l = (k-1)\cdot m + j \\ 0 & l \neq (k-1)\cdot m + j \end{cases}.$$

Dies liefert dasselbe Gleichungssystem wie in Beispiel 6:

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{k,j,l}\cdot C_{k,j} = C_{a\left(l/m\right),\, l-\left(a\left(l/m\right)-1\right)m},\; l = 1,\ldots,n\cdot m$$

Dabei sei $\mathbf{a(x)}$ wiederum der aufgerundete Wert von $\mathbf{x}$.

Die Argumentation ist identisch mit der Argumentation von Beispiel 6: Das Indexpaar $\left(a\left(l/m\right), l-\left(a\left(l/m\right)-1\right)\cdot m\right)$ durchläuft für $l = 1,\ldots,n\cdot m$ die Indexpaare (k,j), $k = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$, damit erhält man das Gleichungssystem

$$C_{k,j} = 0,\; k = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m,$$

dies hat als einzige Lösung den Nullvektor und es gibt somit keine nichttrivialen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

Beispiel 8: *(Einfache jährliche Verzinsung)*

Variablentransformation: $\mathbf{h(i)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+i}}$

Wegen der jährlichen Verzinsung gilt $\mathbf{m=1}$. Man erhält für $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1,\ldots,n}\}$ und $\mathbf{i \geq 0}$:

$$\mathbf{f(k,1,i)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+k\cdot i}} = \frac{\mathbf{h(i)}}{\mathbf{k}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-h(i)\cdot \frac{k-1}{k}}} = \sum_{\mathbf{l=1}}^{\infty} \frac{(\mathbf{k-1})^{\mathbf{l-1}}}{\mathbf{k^l}} (\mathbf{h(i)})^{\mathbf{l}},$$

d.h.

$$\mathbf{b}_{\mathbf{k,1,l}} = \begin{cases} \dfrac{(\mathbf{k-1})^{\mathbf{l-1}}}{\mathbf{k^l}} & \mathbf{l \neq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{l = 0} \end{cases}.$$

Dies liefert das Gleichungssystem

$$\mathbf{0} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b}_{\mathbf{k,j,l}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{k,j}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{(\mathbf{k-1})^{\mathbf{l-1}}}{\mathbf{k^l}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{k,1}},\ \mathbf{l = 1,\ldots,n}.$$

Für $\mathbf{n=1}$ ist die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems $\mathbf{1}$, für $\mathbf{n=2}$ ergibt sich als Determinante $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ und für $\mathbf{n=3}$ als Determinante $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{108}}$.
Diese drei Werte kann man auch wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{n=1:} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1^1}} \\ \mathbf{n=2:} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1^1\cdot 2^2}} \\ \mathbf{n=3:} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3}} \end{array}.$$

Für $\mathbf{n=4}$ erhält man als Determinante der Koeffizientenmatrix $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{27.648}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4}}$.

Dies lässt als allgemeine Formel für die Determinante $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n}}$ vermuten. Mit EDV-technischen Mitteln lässt sich dies auch für alle handhabbaren $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$ nachrechnen. Einen allgemein gültigen Beweis bleibt der Autor an dieser Stelle allerdings schuldig.

Ist somit die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich $\mathbf{0}$ ist, so hat das Gleichungssystem lediglich den Nullvektor als Lösung und es gibt keine nichttrivialen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

8. Anwendungen des Hauptsatzes (Teil 2): Relativ gemischte Verzinsung

Im Unterschied zu den im letzten Kapitel behandelten Zinsmodellen gibt es bei der relativ gemischten Verzinsung Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert. Wir betrachten zunächst nochmals das schon in Kapitel 1 behandelte Beispiel ($\mathbf{n = 2, m = 2}$). Anschließend wird im allgemeinen Fall eine Menge von Zahlungsströmen mit zinsunabhängigem Barwert konstruiert.

Als Variablentransformation hat man: $\mathbf{h(i) = \frac{1}{1+\frac{i}{m}}}$. Damit erhält für $\mathbf{k \in \{1,\ldots,n\}}$, $\mathbf{j \in \{1,\ldots,m\}}$ und $\mathbf{i \geq 0}$:

$$\mathbf{f(k,j,i) = \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{j} \cdot (h(i))^k \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^l \cdot (h(i))^l\right)^{k-1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{j-1}{j}\right)^l \cdot (h(i))^l}$$

(Vgl. Bespiel 4 e)

Beispiel 9:

Es seien $\mathbf{n = 2}$ und $\mathbf{m = 2}$. Man erhält:

$$\mathbf{f(1,1,i) = h(i) \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{0}{1}\right)^l \cdot (h(i))^l = h(i)}$$

$$\mathbf{f(1,2,i) = \frac{1}{2} \cdot h(i) \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot (h(i))^l = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot (h(i))^l}$$

$$\mathbf{f(2,1,i) = \frac{1}{2} \cdot (h(i))^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot (h(i))^l \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{0}{1}\right)^l \cdot (h(i))^l = \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \cdot (h(i))^l}$$

$$\mathbf{f(2,2,i) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (h(i))^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot (h(i))^l \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot (h(i))^l = \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot (l-1) \cdot (h(i))^l}$$

Damit ergibt sich als Gleichungssystem im Sinne des Hauptsatzes:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{l=0:} & \mathbf{0=0} \\
\mathbf{l=1:} & \mathbf{C_{1,1}+\frac{1}{2}\cdot C_{1,2}=0} \\
\mathbf{l=2:} & \mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot C_{1,2}+\frac{1}{2}\cdot C_{2,1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot C_{2,2}=0} \\
\mathbf{l\geq 3:} & \mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^l\cdot C_{1,2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\cdot C_{2,1}+\left(\frac{1}{2}\right)^l\cdot (l-1)\cdot C_{2,2}=0}
\end{array}$$

Multipliziert man die Gleichung für $\mathbf{l=2}$ mit $\mathbf{1/2}$ und subtrahiert das Ergebnis von der Gleichung für $\mathbf{l=3}$, so ergibt sich:

$$\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\cdot C_{2,2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot C_{2,2}=0}.$$

Dies ist äquivalent zu $\mathbf{C_{2,2}=0}$. Eingesetzt liefert dies für $\mathbf{l\geq 2}$ äquivalente Gleichungen und das Gleichungssystem lässt sich auf die beiden folgenden Gleichungen reduzieren:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{C_{1,1}+\frac{1}{2}\cdot C_{1,2}=0} \\
\mathbf{\frac{1}{2}\cdot C_{1,2}+C_{2,1}=0}
\end{array}.$$

Als Lösungsmenge erhält man:

$$\mathbf{L=\left\{\begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ C_{2,1} \\ C_{2,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ -t \\ 0\end{pmatrix} \;\middle|\; t\in IR\right\}}.$$

Diese Lösungsmenge ist damit in diesem einfachen Beispiel die Menge aller Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert. Wählt man $\mathbf{t\neq 0}$, so erhält man einen nichttrivialen Zahlungsstrom, wählt man speziell $\mathbf{t=1}$, so erhält man den Zahlungsstrom aus Beispiel 1.

Beispiel 10:

Es seien $\mathbf{n,m\in IN}$ und $\mathbf{i\geq 0}$. Ferner seien $\mathbf{k_0\in\{1,\ldots,n\}}$ und $\mathbf{j_0\in\{1,\ldots,m-1\}}$. Wir definieren den folgenden Zahlungsstrom:

$$C_{k,j} = \begin{cases} 1 & , \quad k = k_0, j = j_0 \\ -\frac{m}{j_0} & , \quad k = k_0, j = m \\ \frac{m}{j_0} - 1 & , \quad k = k_0 + 1, j = j_0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Als Barwert dieses Zahlungsstroms erhält man:

$$B_0(i) = \frac{1}{(1+i)^{k_0-1} \cdot \left(1 + \frac{j_0}{m} \cdot i\right)} - \frac{\frac{m}{j_0}}{(1+i)^{k_0}} + \frac{\frac{m}{j_0} - 1}{(1+i)^{k_0} \cdot \left(1 + \frac{j_0}{m} \cdot i\right)} =$$

$$= \frac{(1+i) - \frac{m}{j_0} \cdot \left(1 + \frac{j_0}{m} \cdot i\right) + \frac{m}{j_0} - 1}{(1+i)^{k_0} \cdot \left(1 + \frac{j_0}{m} \cdot i\right)} = 0$$

Somit handelt es sich bei diesem Zahlungsstrom um einen Zahlungsstrom mit zinsunabhängigem Barwert. Da der Barwert linear ist, haben alle Linearkombinationen von Zahlungsströmen dieser Struktur ebenfalls diese Eigenschaft. Alternativ kann man argumentieren, dass gemäß dem Hauptsatz der obige Zahlungsstrom eine Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems ist und auch Linearkombinationen dieses Gleichungssystem lösen.

9. Schlussbemerkung

In den Anwendungen des Hauptsatzes zeigt sich, dass es bei den in der Praxis verwendeten Standardzinsmodellen einen Unterschied bezüglich der Fragestellung dieser Arbeit gibt. Bei der einfachen Verzinsung, bei der jährlichen Verzinsung mit Zinseszins, bei der unterjährlichen Verzinsung mit relativem Zins und bei der konformen Verzinsung gibt es keine nichttrivialen Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert.

Bei der relativ gemischten Verzinsung hingegen sind solche Zahlungsströme möglich. Als Anwendung des Hauptsatzes erhält man bei allgemeiner Laufzeit und allgemeiner Anzahl unterjährlicher Zahlungen eine ganze Schar von Zahlungsströmen mit zinsunabhängigem Barwert. Da diese Zahlungsströme aber Einzahlung und Auszahlungen im Wechsel enthalten und somit insbesondere keine Normalinvestitionen sind (vgl. [6] S.220), haben sie m.E. keine praktische Bedeutung, z.B. im Sinne einer Arbitragemöglichkeit.

Hat man aber als finanzmathematische Aufgabenstellung die Bewertung eines Zahlungsstroms, so kann solchen Beispielen doch eine gewisse Bedeutung zukommen. Zumindest macht es die Verwendung der relativ gemischten Verzinsung angreifbar. Deshalb ist es sinnvoll bei unterjährlichen Zahlungsströmen als Modell auf die unterjährliche Verzinsung mit relativem Zins oder die konforme Verzinsung zurückzugreifen.

Literaturverzeichnis

[1]	*Arrenberg, Jutta*	Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag, München 2011.
[2]	*Barmer, Martin und Flohr, Friedrich*	Analysis I, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin New York 1983.
[3]	*Heidorn, Thomas*	Finanzmathematik in der Bankpraxis, 5. Auflage, Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, Wiesbaden 2006.
[4]	*Heuser, Harro*	Lehrbuch der Analysis Teil 1, 7. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1990.
[5]	*Neuburger, Edgar*	Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise, Blätter der DGVFM, Bd. XIX, Heft 3, S.257 – S.267, 1990.
[6]	*Tietze, Jürgen*	Einführung in die Finanzmathematik, 3. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig Wiesbaden 2000.

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am IVW Köln". Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder hier abgerufen werden.

Forschung am IVW Köln, 9/2014
Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert
Köln, September 2014

ISSN (online) 2192-8479

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch
Schmalenbach Institut für Betriebswirtschaftslehre/
Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3425
Fax +49 221 8275-3277

Mail ralf.knobloch@fh-koeln.de